UNIVERSIDADE ESTADUAL VALE DO ACARAÚ – UVA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – CCET
CURSO: CIÊNCIAS – HAB. MATEMÁTICA
DISCIPLINA – INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E ORDINÁRIAS
PROFESSOR: TARCÍSIO PRACIANO PEREIRA
ALUNOS:
Leonardo Nogueira de Matos – ld-matos@bol.com.br
Edgar da Silva Araújo – e-dgar@bol.com.br

SOLUÇÃO LISTA 04

SOBRAL – CE
NOVEMBRO – 2008

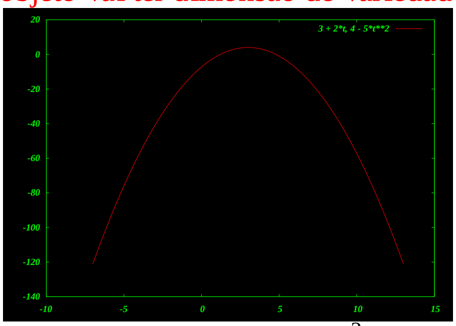
CONSIDERAÇÕES:

No presente trabalho, trabalhamos com vários conceitos das diversas modalidades de cálculo, desde o mais simples até o mais avançado. Usamos largamente o gnuplot na visualização de funções cartesianas e paramétricas. As curvas de nível podem ser visualizadas através do comando "set contour base/both.surface", onde base: as curvas de nível ficarão situadas na base da função(abaixo do gráfico); surface: as curvas de nível ficarão situadas no gráfico da função, e both: as curvas de nível ficarão situadas na base e no gráfico da função, sendo essa última forma a mais usada na resolução dos exercícios, já que ela dá uma visão mais global da situação corrente, e por último tivemos a enunciação do teorema da função implícita com a ajuda também de um livro de cálculo.

1. Dimensão de uma variedade A dimensão de uma variedade, a variedade linear tangente a mesma em um ponto, e o espaço (mínimo) em que as variedades se encontram imersas.

eq. da variedade	dim. da var	dim. do espaço
a)(V)[ ](F)[ ] $(3 + 2t, 4 - 5t^2)$; $t \in [0, 10]$	dois	dois

FALSO, pois como está na forma paramétrica e apresenta somente uma variável, este objeto vai ter dimensão de variedade 1; representará uma curva:



b)(V)[ ](F)[ ] $(3 + 2t, 4 - 5t^2)$; $t \in [0, 10]$ um dois

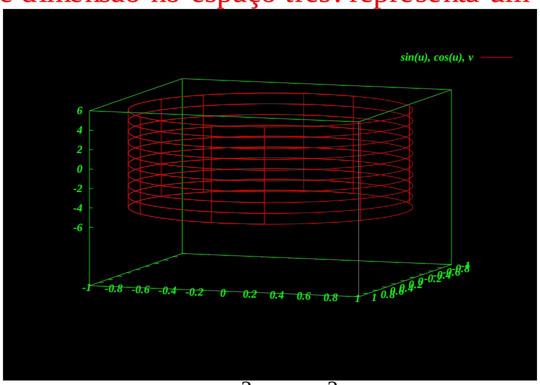
VERDADEIRO, já que apresenta uma variável, vai ter dimensão de variedade 1.VIDE GRÁFICO ANTERIOR

c)(V)[ ](F)[ ] (rcos(t), rsin(t), s) ; $t, s \in [-\pi, \pi]$ um três

FALSO, pois como tem duas variáveis, apresentará dimensão de variedade dois e dimensão no espaço três.

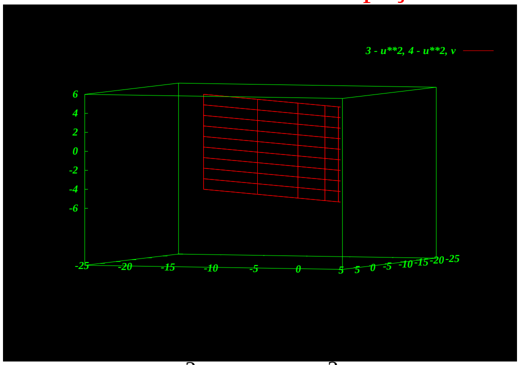
d)(V)[ ](F)[ ] (rsin(t), rsin(t), s) ; $t, s \in [0, 10]$ dois três

VERDADEIRO, pois como tem duas variáveis, apresentará dimensão de variedade dois e dimensão no espaço três: representa um cilindro. No gnuplot:



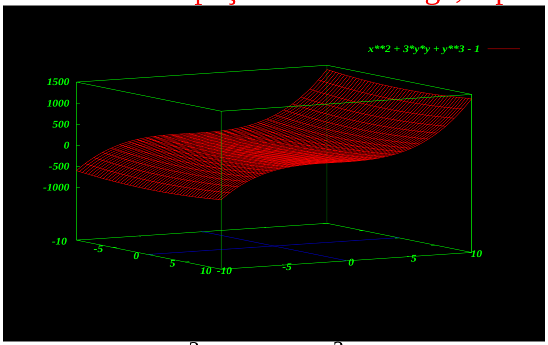
e)(V)[ ](F)[ ] $(3 + t^2, 4 - t^2, s)$ t, s 2 $[-5, 5]$; três dois

FALSO, pois como tem duas variáveis, a dimensão de variedade é dois, e três coordenadas dimensão no espaço três. Representa um plano. Veja:



f)(V)[ ](F)[ ] $x^2 + 3xy + y^3 = 1$ um dois

VERDADEIRO, pois, em uma equação cartesiana, a dimensão da variedade será igual à dimensão no espaço menos 1. Logo, representa uma superfície no espaço R^3:



g)(V)[ ](F)[ ] $x^2 + 3xy + y^3 = 0$ um três

FALSO, pois como a dimensão no espaço é três, a dimensão de variedade teria de ser 3 – 1 = 2.

h)(V)[ ](F)[ ] $x^2 + 3xy + y^3 = -1$ um quatro

FALSO, pois como a dimensão no espaço é 4, a dimensão da variedade teria de ser: 4 – 1 = 3, representando um objeto no espaço R^4

2. Dimensão de uma variedade. A dimensão de uma variedade, a variedade linear tangente a mesma em um ponto, e o espaço (mínimo) em que as variedades se encontram imersas.

	eq. da variedade	dim da var	dim. do espaço
a)(V)[ ](F)[ ]	$x^2y + 3xz + xy^3 = 1$	um	dois

FALSO, já que a equação está em um espaço R^3, sua dimensão de variedade deverá ser dois.

b)(V)[ ](F)[ ]	$x^2y + 3xz + xy^3 = 0$	dois	três

VERDADEIRO, já que em uma equação cartesiana a dimensão de variedade será igual à sua dimensão no espaço menos 1. Assim, 3 – 1 = 2, que está de acordo com o item.

c)(V)[ ](F)[ ]	$x^2y + 3xz + xy^3 = -1$	três	quatro

VERDADEIRO, pois como a dimensão no espaço é quatro, então a dimensão de variedade é: 4 – 1 = 3, coerente com o que afirma o item.

d)(V)[ ](F)[ ]	$x^2yw + 3xz + wxy^3 = -1$	três	cinco

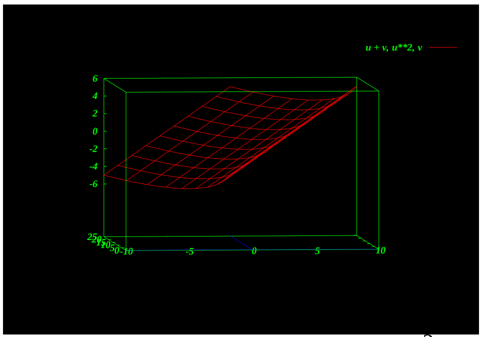
FALSO, pois sendo de dimensão espacial cinco, deveria ter dimensão de variedade quatro, e não três como sugere o item.

e)(V)[ ](F)[ ]	$x^2yw + 3xz + wxy^3 = -1$	quatro	cinco

VEREDADEIRO, já que apresenta dimensão no espaço cinco, deve ter dimensão de variedade 5 – 1 = 4, conforme sugere a alternativa.

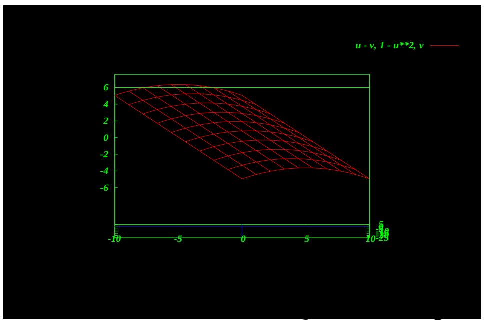
f)(V)[ ](F)[ ] $(t + s, t^2, s)$; t 2 $[-5, 5]$ um   três

FALSO, pois na forma paramétrica o número de variáveis representa a dimensão da variedade, que nesse caso deveria ser dois. No espaço, representa uma superfície curvada:



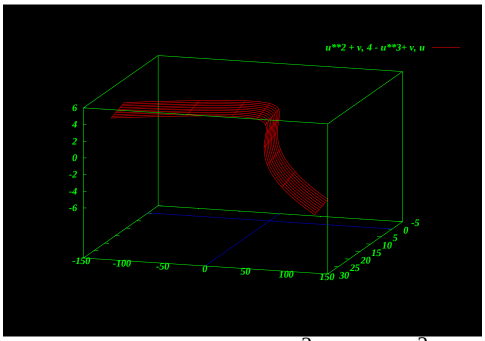
g)(V)[ ](F)[ ] $(t - s, 1 - t^2, s)$; $t, s \in [-5, 5]$ dois   três

VERDADEIRO, pois, como está na forma paramétrica, e como tem duas variáveis, a sua dimensão de variedade será dois. No espaço R3, representa também uma superfície curvada:



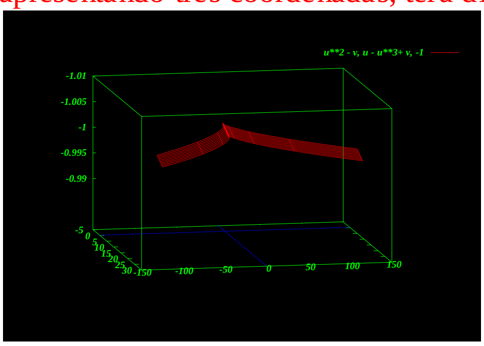
h)(V)[ ](F)[ ] $(t^2 + s, 4 - t^3 + s, t)$; $t \in [-5, 5]$ um   três

FALSO, pois como está na forma paramétrica e tem duas variáveis, deveria ser de dimensão de variedade dois. No espaço, representa uma curva em um formato que lembra um cabo flat:



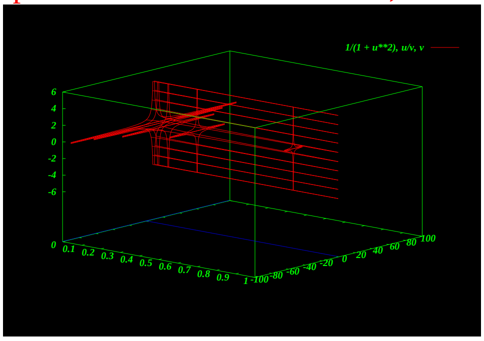
i)(V)[ ](F)[ ] $(t^2 - s, t - t^3 + s, -1)$; $t \in [-5, 5]$ dois   três

VERDADEIRO, já que possui duas variáveis e dimensão de variedade dois,e, apresentando três coordenadas, terá dimensão de espaço três. No espaço:



j)(V)[ ](F)[ ] $(1/(1 + t^2), t/s , s)$; $t, s \in [1, 10]$ dois três

VERDADEIRO, já que possui duas variáveis e dimensão de variedade dois e, apresentando três coordenadas, terá dimensão de espaço três. No espaço:



k)(V)[ ](F)[ ] $xyz - yzw + xzw = 4$ três quatro

VERDADEIRO, já que em uma equação cartesiana a dimensão de variedade será igual à sua dimensão no espaço menos 1. Assim, 4 – 1 = 3, que está coerente com o que o item afirma.

3. Dimensão de variedade:

(a) (V)[ ](F)[ ] Existem cinco equações, nas questões (1), (2) que podem ser expressas como $[a, b] \xrightarrow{G} R^3$; $G(\theta) = (u(\theta); v(\theta); w(\theta))$

FALSO, já que, conforme sugere o item, deve-se ter equações no espaço R3, devido às três coordenadas apresentadas, porém de dimensão de variedade um, já que é apenas uma variável, e não há nos dois itens anteriores equações que satisfaçam essas condições.

(b) (V)[ ](F)[ ] Existem quatro equações, nas questões (1), (2) que podem ser expressas como $[a, b] \xrightarrow{G} R^3$; $G(\theta) = (u(\theta); v(\theta); w(\theta))$

FALSO, VIDE ITEM ANTERIOR.

(c) (V)[ ](F)[ ] Existem quatro equações, nas questões (1), (2) que podem ser expressas como $[a, b] \times [c, d]$ $[a, b] \xrightarrow{G} R^3$; $G(\theta, \rho) = (u(\theta, \rho); v(\theta, \rho); w(\theta, \rho))$

VERDADEIRO, pois como sugere o item, devemos ter quatro equações no formato paramétrico, com três coordenadas em função de duas variáveis, ou seja, uma transformação do espaço R^2 para o espaço R^3. Na verdade são oito itens: na primeira questão: itens (c), (d) e (e), e na segunda questão, os itens (f) ao (j) satisfazem as condições do problema.

(d) (V)[ ](F)[ ] Existem sete equações, nas questões (1), (2) que podem ser expressas como $[a, b] \times [c, d] \xrightarrow{G} R^3$; $G(\theta, \rho) = (u(\theta, \rho); v(\theta, \rho); w(\theta, \rho))$

VERDADEIRO, VIDE ITEM ANTERIOR.

(e) (V)[ ](F)[ ] Existem três equações, nas questões (1), (2) que podem ser expressas como

$$\Omega \subset R^3 \xrightarrow{G} R^4 ; G(\theta, \rho, \eta) = (u1(\theta, \rho, \eta), (u2(\theta, \rho, \eta), (u3(\theta, \rho, \eta), (u4(\theta, \rho, \eta))$$

A definição acima significa uma transformação do espaço R3 no espaço R4, assim, na 1ª questão, o item (h) e na segunda questão os itens (c) e (k) satisfazem as condições do problema.

(f) (V)[ ](F)[ ] Existem cinco equações, nas questões (1), (2) que podem ser expressas como

$\Omega \subset R^3 \xrightarrow{G} R^4$;$G(\theta, \rho, \eta) = (u1(\theta, \rho, \eta), (u2(\theta, \rho, \eta), (u3(\theta, \rho, \eta), (u4(\theta, \rho, \eta))$
FALSO, VIDE ITEM ANTERIOR.

(g) (V)[ ](F)[ ] Existem cinco equações, nas questões (1), (2) que podem ser expressas como
$[a, b] \times [c, d] \xrightarrow{F} R^2$; $G(r, \theta) = (u(r, \theta); v(r, \theta); w(r, \theta))$
VERDADEIRO, a sentença acima define transformações do espaço R^2 para o espaço R^3, e as funções que satisfazem são: na 1ª questão, itens (e) e (g) e na 2ª questão itens (b) e do (g) ao (j).

4. Dimensão, função e derivada.

	F	F′
a)(V)[ ](F)[ ]	$R \longrightarrow R$	$R \longrightarrow R$

VERDADEIRO, já que a derivada de uma função no espaço R também é uma função no espaço R.

b)(V)[ ](F)[ ] $R \longrightarrow R$ $R \longrightarrow R^2$
FALSO, pois a derivada de uma função em R não pode ser uma função em R^2.

c)(V)[ ](F)[ ] $R \longrightarrow R^2$ $R \longrightarrow R^2$
VERDADEIRO, sendo F uma função de R em R^2, ela apresentará duas variáveis e sua derivada será da forma F' $\rightarrow \left(\frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}\right)$ - derivadas parciais, ou seja, vai estar definida também de R em R^2

d)(V)[ ](F)[ ] $R \longrightarrow R^2$ $R^2 \longrightarrow R^2$
FALSO, pois conforme item anterior a derivada de uma função definida de R em R^2 vai estar também definida de R em R^2

e)(V)[ ](F)[ ] $R^2 \longrightarrow R^2$ $R \longrightarrow R^2$
FALSO, pois a derivada de uma função definida de R^2 em R^2(ou seja, quatro variáveis) através de sucessivas derivações será definida em R^4, já que cada variável dará origem a uma derivada parcial. Veja:

$$R^2 \rightarrow R^2 \qquad\qquad R^2 \rightarrow R^4$$

$$\begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \frac{dF}{dx} & \frac{dF}{dy} \\ \frac{dF}{du} & \frac{dF}{dv} \end{bmatrix}$$

f)(V)[ ](F)[ ] $R^2 \longrightarrow R^2$ $R^2 \longrightarrow R^4$
VERDADEIRO, VIDE ITEM ANTERIOR.

g)(V)[ ](F)[ ] $R^2 \longrightarrow R^3$ $R^2 \longrightarrow R^4$
FALSO, pois uma função de R^2 em R^3(ou seja, 6 variáveis) dará origem a uma derivada de origem em R^2 para R^6, já que são seis derivadas parciais a calcular.

h)(V)[ ](F)[ ] $R^2 \longrightarrow R^3$ $R^2 \longrightarrow R^6$
VERDADEIRO, VIDE ITEM ANTERIOR.

i)(V)[ ](F)[ ] $R^3 \longrightarrow R^3$ $R^3 \longrightarrow R^6$

FALSO, já que uma função definida de R^3 em R^3(ou seja, 9 variáveis) dará origem a uma função derivada definida de R^3 em R^9, já qu são nove derivadas parciais a calcular.

j)(V)[ ](F)[ ] $R^3 \longrightarrow R^3$ $R^3 \longrightarrow R^9$
VERDADEIRO, VIDE ITEM ANTERIOR.

5. Dimensão e função. Podemos dizer sobre o gráfico da função

$$f:[a, b] \rightarrow R$$

		Variedade de dimensão	Imersa num espaço de dimensão
a)	(V)[ ] (F)[ ]	Zero	Dois
b)	(V)[ ] (F)[ ]	Um	Dois
c)	(V)[ ] (F)[ ]	Dois	Dois
d)	(V)[ ] (F)[ ]	Três	Três

Observemos que, o domínio da função é um intervalo na reta dos reais fechado em ambos os sentidos (portanto variedade de dimensão um), e que a função está definida no universo dos números reais; assim, a função f é uma curva no plano dos reais, ou seja, está imersa em R^2, o que faz dos itens (a), (c) e (d) FALSOS e o item (b) VERDADEIRO.

6. Dimensão, função e derivada (jacobiana). Sendo

$$R^n \xrightarrow{f} R^m$$

Supomos que seja diferenciável, podemos dizer que os gráficos Graf(f) e Graf(f')

a) (V)[ ](F)[ ] dim(Graf(f)) pode ser zero e neste caso dim(Graf(f')) também é zero. Um ponto é uma variedade de dimensão zero.
FALSO, pois não existe Graf(f) de dimensão zero.

b) (V)[ ](F)[ ] dim(Graf(f)) pode ser mn e neste caso dim(Graf(f)) também será $(mn)^2$.
FALSO, pois o gráfico de f pode ser de dimensão no máximo m + n – 1.

c) (V)[ ](F)[ ] dim(Graf(f)) pode ser no máximo mn – 1.
FALSO pelo mesmo motivo da questão anterior.

d) (V)[ ](F)[ ] dim(graf(f)) pode ser no máximo m + n – 1 e a dimensão da variedade linear tangente a um ponto do gráfico de f pode ser no máximo m + n – 1. No caso da dimensão máxima Graf(f') é um hiperplano de R^{n+m}.
VERDADEIRO. **O conceito de hiperplano é o espaço que está imediatamente inferior ao que está contido, como exemplo tem-se que o hiperplano de R^2 é o espaço R^1, o de R^3 é o R^2, e assim por diante**. Então, como a dimensão do espaço considerado é m + n, a dimensão da derivada é no máximo m + n – 1, que é um hiperplano de R^{m+n}.

e) (V)[ ](F)[ ] Quando m = n = 1 a derivada de f calculada no ponto x = a é uma variedade linear de dimensão no máximo um.
VERDADEIRO, pois se a dimensão máxima é m + n – 1 então m = n = 1, temos que a dimensão da derivada calculada em um ponto x = a é 1 + 1 – 1 = 1, ou seja, uma curva.

f) (V)[ ](F)[ ] Quando m = n = 1, a derivada de f calculada no ponto x = a é a matriz de uma função linear cujo gráfico é de dimensão no máximo um.

g) (V)[ ](F)[ ] A derivada de f no ponto P = $(a_1, ..., a_n, f(a_1, ..., a_n))$ é uma variedade linear de dimensão no máximo m + n – 1.
VERDADEIRO, se temos uma função em $R^n \to R^m$, ela está mergulhada em uma dimensão m + n. Exemplo: a função que faz a associação f :[a, b] → R, que está definida no intervalo [a, b] (um pedaço de reta em R) e que associa valores em R, formando em R^2 (dimensão dois) uma curva (que tem dimensão 1).

7. (V)[ ](F)[ ] Se $R^n \xrightarrow{T} R^m$ então o quadro abaixo expressa corretamente a dimensão máxima da imagem de T′(a) em que a é um ponto do domínio de T.

m/n	1 2 3 4
1	1 2 3 4
2	2 4 6 8
3	3 6 9 12

FALSO, pois pelo que ilustra o quadro acima, a dimensão máxima é mn, e pelo que sabemos é m + n – 1.

8. (V)[ ](F)[ ] Se $R^n \xrightarrow{T} R^m$ então o quadro abaixo expressa corretamente a dimensão do gráfico de T′.

m/n	1 2 3 4
1	1 2 3 4
2	2 3 4 5
3	3 4 5 6

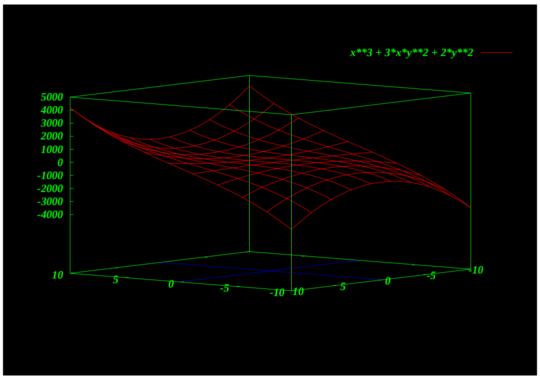
VERDADEIRO, pois a tabela acima indica que a dimensão máxima é m + n – 1, que já sabemos ser correta.

9. Caminhos sobre variedades - curvas ou variedades de nível

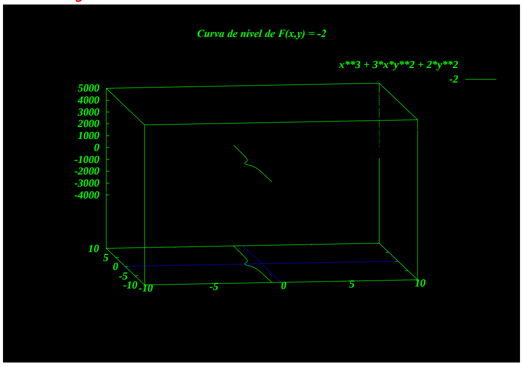
(a) (V)[ ](F)[ ] Uma solução particular F(a, b) = −2 para $z = F(x, y) = x^3 + 3xy^2 + 2y^2$ (17) pode ser obtida dando-se um valor particular para uma das variáveis e resolvendo-se uma equação do terceiro grau.
VERDADEIRO, no caso se atribuirmos um valor para a variável x, digamos ‘a’, e obteremos uma solução particular do tipo (a, f(a)) = -2.

(b) (V)[ ](F)[ ] Uma solução particular F(a, b) = −2 para $z = F(x, y) = x^3 + 3xy^2 + 2y^2$ (18) pode ser obtida dando-se um valor particular para uma das variáveis e resolvendo-se uma equação do segundo grau.
VERDADEIRO, no caso, se atribuirmos um valor numérico para a variável x, digamos ‘b’, obteremos uma expressão do tipo (b, f(b)) = -2.

(c) (V)[ ](F)[ ] Se $z = F(x, y) = x^3 + 3xy^2 + 2y^2$ (19) então a dimensão da variedade F(x,y) = −2 é 1.
VERDADEIRO, vejamos que a equação representa no espaço uma superfície:



Sendo assim, a expressão F(x, y) = -2 representa uma curva de nível da função F, e como já sabemos, curvas tem dimensão igual a um. Veja no gnuplot a vista no espaço:



(d) Ao derivarmos implicitamente F(x, y) = −2 obtemos o modelo para a variedade linear tangente ao gráfico de F no ponto (a, b,−2) supondo-se que conheça uma solução particular para a equação F(x, y) = −2

FALSO, no caso, a inclinação de uma equação tangente a uma superfície gerada pelo gráfico de uma função F(x,y)

(e) (V)[ ](F)[ ] Supondo que z = F(x, y) é diferenciável, "Como você calculou as derivadas parciais em um ponto (a, b) dado, de $z = F(x, y) = x^3 + 3xy^2 + 2y^2$ (20) então você encontrou uma expressão do tipo A(x − a) + B(y − b) = 0 e pode, assim, calcular

• y = b +m(x − a) ou
• x = a + n(y − b)

FALSO. Ao calcularmos as derivadas parciais de uma função qualquer F(x, y), elas vão representar a inclinação do plano tangente a esse gráfico dessa função em determinado ponto (a, b), adquirindo a forma geral μ: $\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)\cdot(x-a) + \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\cdot(y-b)$. Então, "isolando" y em função de x, teremos uma função da forma y = b + m(x – a), ou, "isolando" x em função de y, teremos uma função de forma x = a + n(y – b). Porém, pela a garantia da existência dessas equações do plano em função de x ou em função de y, nenhuma das derivadas parciais pode ser igual a zero, pois caso for, iremos ter uma indeterminação nessas equações. Logo, para ser verídico, $\frac{\partial F}{\partial x}(a,b) \neq 0$ ou $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$.

(f) (V)[ ](F)[ ] Supondo que z = F(x, y) é diferenciável, "Como você calculou as derivadas parciais em um ponto (a, b) dado, de $z = F(x, y) = x^3 + 3xy^2 + 2y^2$ (21) então você encontrou uma expressão do tipo A(x − a) + B(y − b) = 0 e pode, assim, calcular

• y = b +m(x − a) ou
• x = a + n(y − b)

se um dos números A,B for diferente de zero.

VERDADEIRO, VIDE ITEM ANTERIOR (pois os números A e B representam as derivadas parciais dessa função em determinado ponto (a, b)).

(g) (V)[ ](F)[ ] Supondo que z = F(x, y) é diferenciável, "Como você calculou as derivadas parciais em um ponto (a, b) dado, de $z = F(x, y) = x^3 + 3xy^2 + 2y^2$ (22) então você encontrou uma expressão do tipo $A(x - a) + B(y - b) = \frac{dF}{dx}(a, b)(x - a) + \frac{dF}{dy}(a, b)(y - b) = 0$
e pode, assim, encontrar a equação da reta tangente a uma curva de nível de F no ponto (a, b, F(a, b))

- $$y = b + m(x - a)\ ;\ m = \frac{\frac{dF}{dx}(a,b)}{\frac{dF}{dy}(a,b)}$$

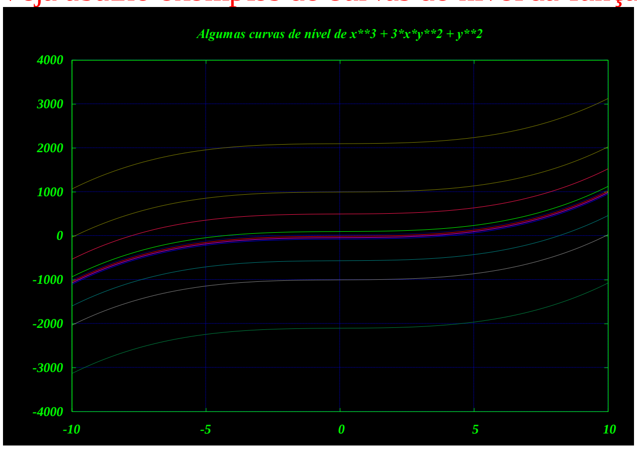
ou

- $$x = a + n(y - b)\ ;\ n = \frac{\frac{dF}{dy}(a,b)}{\frac{dF}{dx}(a,b)}$$

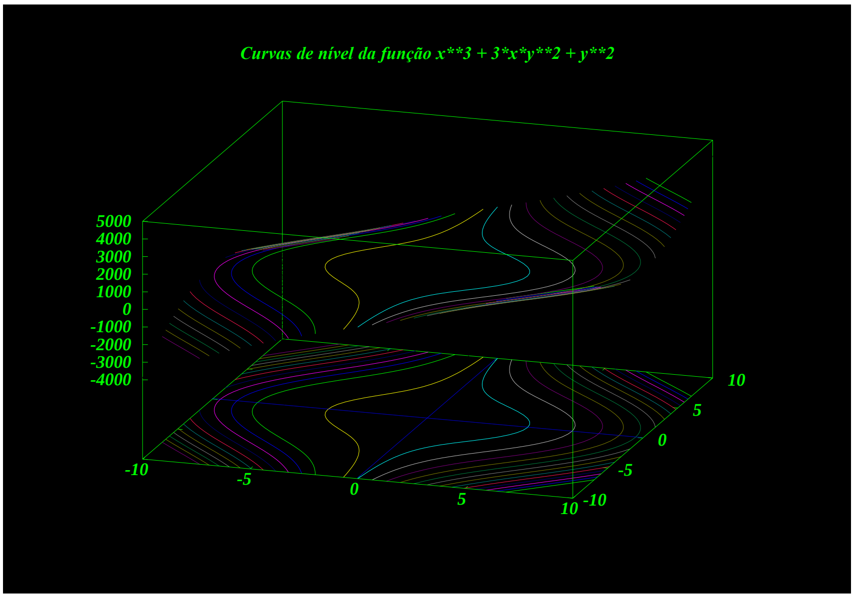
se uma das derivadas parciais for diferente de zero.

FALSO. Como explorado nos itens (e) e (f), a partir da equação do plano tangente ao gráfico da função, podemos explicitar y em função de x ou x em função de y, desde que uma das derivadas parciais seja diferente de zero; assim nas funções y = b + m(x – a) ou x = a + n(y – b), as expressões $m = \frac{\frac{dF}{dx}(a,b)}{\frac{dF}{dy}(a,b)}$ ou $n = \frac{\frac{dF}{dx}(a,b)}{\frac{dF}{dy}(a,b)}$ representam as respectivas inclinações dessas retas, que **SÃO** as inclinações das retas tangentes às curvas de nível de f(x,y). Podemos obter diversas curvas de nível da função $x^3 + 3xy^2 + 2y^2$ atribuindo um valor particular a y ou a x e igualando o restante a uma constante qualquer C. Analisemos então uma curva de nível particular, fazendo y = 1, obtemos assim a função $f(x) = x^3 + 3x + 2 = C$, ou, fazendo x = 1, obtemos $3y^2 + 2y^2 + 1 = C \to y = \pm\sqrt{\frac{C-1}{5}}$, que são famílias de curvas de nível da função $x^3 + 3xy^2 + 2y^2$, mas observamos que a inclinação delas (dada pela derivada de cada uma) é diferente de $\frac{\frac{dF}{dx}(a,b)}{\frac{dF}{dy}(a,b)}$ ou $n = \frac{\frac{dF}{dx}(a,b)}{\frac{dF}{dy}(a,b)}$.

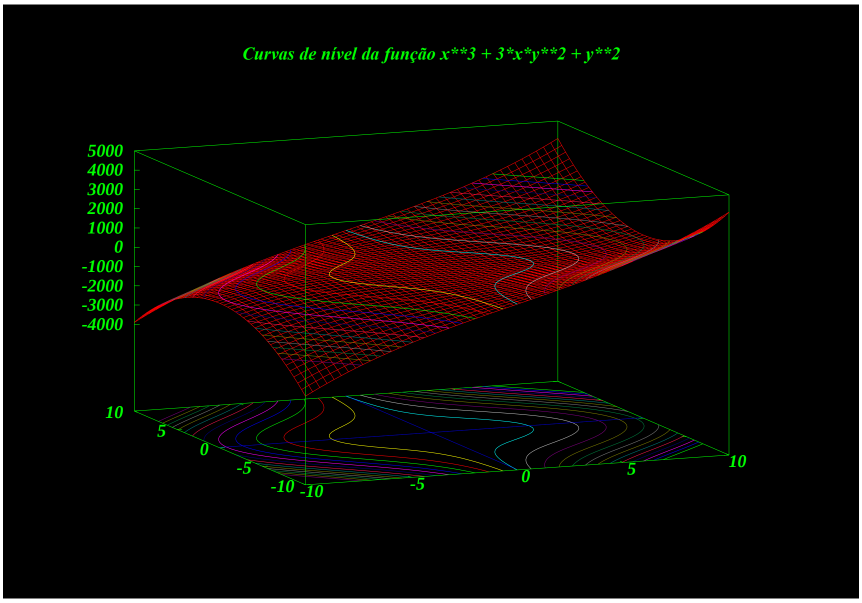
Veja abaixo exemplos de curvas de nível da função $x^3 + 3xy^2 + 2y^2$:



Vistas no espaço e no plano, as disposições das curvas de nível:

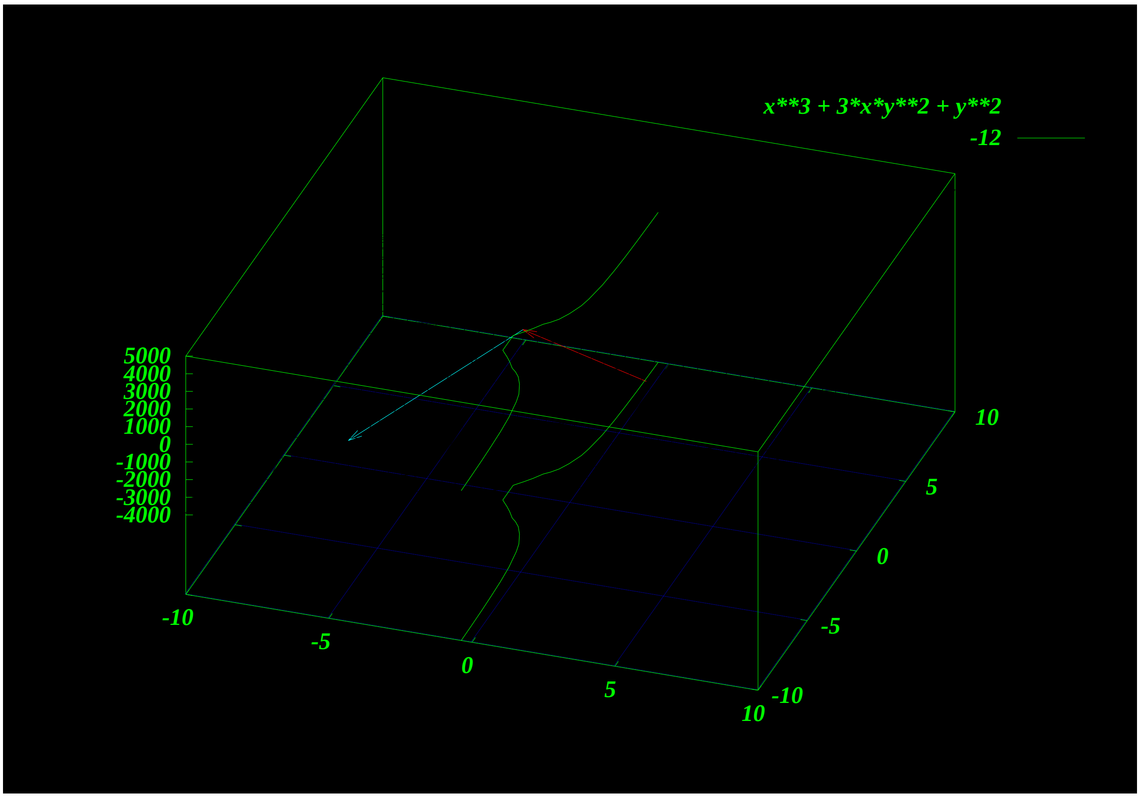


E abaixo, a função com as curvas de nível reproduzidas no Gnuplot:



10. Poligonal - aproximação de curva de nível

Para efeito de exemplo, na questão anterior analisando a função $x^3 + 3xy^2 + 2y^2$ e uma de suas curvas de nível no ponto (-2, 1, -12). Por ela, traçamos dois vetores: um é o gradiente da função nesse ponto e outro é um vetor perpendicular a esse gradiente: o gradiente está na cor **vermelha** e o vetor perpendicular está na cor **verde água**).



Observemos então que qualquer reta situada em cima do vetor verde água será tangente à curva de nível naquele ponto.

(a) (V)[ ](F)[ ] Se z = F(x, y) for diferenciável então F(x, y) = C em que C é uma constante apropriada, é uma curva de nível de F para qual podemos encontrar uma reta tangente de equação

$$y = b + \frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}(x - a)$$

se a derivada apropriada for diferente de zero e conhecermos uma solução (a, b) para F(x, y) = C.

VERDADEIRO. As curvas de nível são um subconjunto da função F(x,y) = C, com C constante. Assim, variando C, obteremos diferentes curvas de nível da função F(x,y). Seja F(x,y) = 0 uma função na forma implícita e calculemos sua derivada com o auxílio da regra da cadeia(derivaremos em relação a x):

$\frac{dF}{dx} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}$. Assim, a expressão $y = b + \frac{-\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}(x - a)$ representa no espaço R^3 um plano tangente ao gráfico da função, e no R2 a reta tangente à curva de nível em (a, b, f(a,b)).

(b) (V)[ ](F)[ ] Se z = F(x, y) for diferenciável então F(x, y) = C em que C é uma constante apropriada, é uma curva de nível de F para qual podemos encontrar uma reta tangente de equação com coeficiente angular

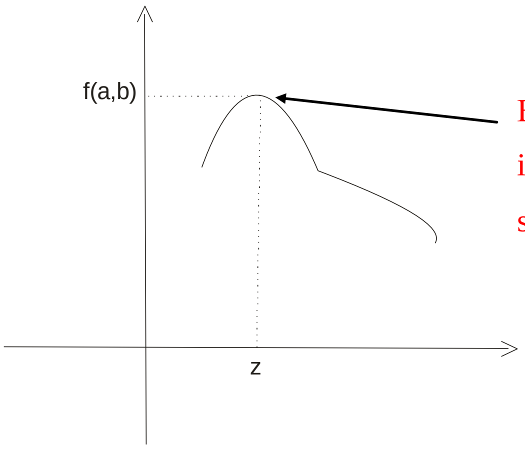
$$\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}} \text{ ou } \frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dx}}$$

se a derivada apropriada for diferente de zero e conhecermos uma solução (a, b) para F(x, y) = C.

VERDADEIRO, como vimos acima, $\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}$ ou $\frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dx}}$ será a inclinação de uma reta tangente ao gráfico de F(x,y).

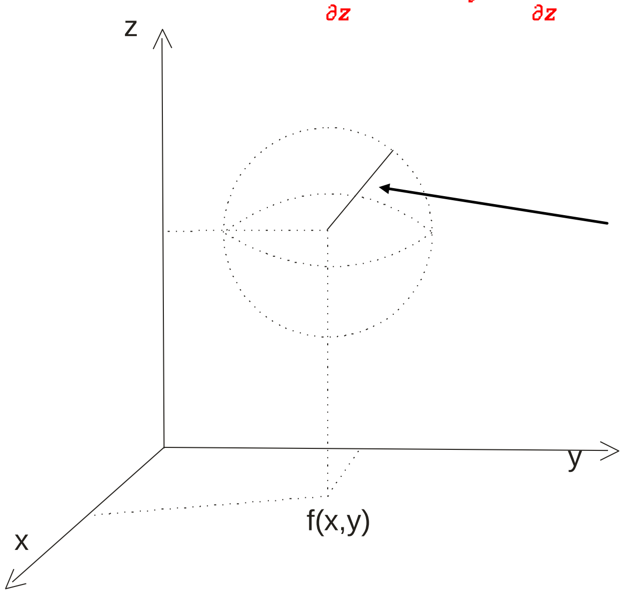
(c) (V)[ ](F)[ ] Se z = F(x, y) for diferenciável então F(x, y) = C em que C é uma constante apropriada, é uma curva de nível de F para qual podemos encontrar uma reta tangente ao gráfico da curva de nível que passa numa solução (a, b, F(a, b)) de F(x, y) = C conseqüentemente existe uma função diferenciável y = f(x) ou x = g(y) permitindo "explicitar" uma das variáveis na equação F(x, y) = C e conhecemos f′(a) ou g′(b).
VERDADEIRO. Como vimos acima, a equação de uma das retas que sejam tangentes à curva de nível será dada por uma das equações: y = b + m(x − a) ; m = $\frac{\frac{dF}{dx}(a,b)}{\frac{dF}{dy}(a,b)}$ ou x = a + n(y − b) ; n = $\frac{\frac{dF}{dy}(a,b)}{\frac{dF}{dx}(a,b)}$, desde que uma das derivadas parciais seja diferente de zero Assim, podemos explicitar qualquer variável 'x' ou 'y' e conhecer sua derivada em um determinado valor 'a' ou 'b'.

11. Teorema da Função Implícita - Questão discursiva. Explique a afirmação: "O método desenvolvido neste tutorial nos permite explicitar, aproximadamente, y como função de x ou reciprocamente, x como função de y". A partir de uma reta tangente no ponto (a, b, F(a, b)) podemos considerar um ponto, (a_1, b_1, c_1) na reta tangente, muito próximo ao ponto de tangência e voltar a resolver o problema com a_1, b_1, c_1 em lugar de a, b,C obtendo uma reta que passa no ponto (a_1, b_1, c_1). Iterando o método vamos obter uma poligonal que é uma aproximação para a curva de nível. Expresse a idéia com um gráfico. Baseado nesta afirmação e no passos desenvolvidos acima tente enunciar o Teorema da Função Implícita e depois procure este teorema num livro de Cálculo e compare com a formulação que você descobriu: você está capacitad@ para descobrir teoremas em Matemática.
O Teorema da Função Implícita apresenta-se em duas situações:
Situação 1) Para (F(x,y), 0): Seja F(x, y) uma função com derivadas parciais contínuas num conjunto aberto U ⊂ R^2. Seja (x_0, y_0) ∈ U tal que F(x_0, y_0) = 0. Se $\frac{\partial F}{\partial y}$($x_0$, y_0) ≠ 0, então existem intervalos abertos I e J, com x_0 pertencente a I e y_0 pertencente a J, tais que, para cada x_0 pertencente a I, existe um único y = f(x) pertencente a J que satisfaz F(x, f(x)) = 0. A função f: I → J é diferenciável, e, para qualquer x pertencente a I, sua derivada pode ser obtida por: $\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$;



Existe um único 'Z' tal que f(a,b) = Z, mas para isso a derivada da função nesse ponto tem que ser diferente de zero.

Situação 2) (F(x, y, z) = 0): Seja F(x, y, z) uma função com derivadas parciais contínuas em um conjunto aberto U $\subset$ R^3. Seja (x_0, y_0, z_0) pertencente a U tal que $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Se $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, então existe uma bola aberta B, com centro em (x_0, y_0) e um intervalo aberto J, com $Z_0 \in J$, tais que para cada (x, y) pertencentes a B, existe um único z = g(x,y) pertencente a J que satisfaz F(x, y, g(x,y)) = 0. A função g(x,y) $\in$ B é diferenciável e, para todo (x, y) pertencente a B, suas derivadas parciais podem ser obtidas através de: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ ou de $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$.



Existe um único f(x, y) tal que f(x, y) = Z, desde que uma das derivadas parciais seja diferente de zero.