Mét. num. e equ. diferenciais ordinárias	**Lista 01**
Derivada, plano tangente, aprox. linear	tarcisio@member.ams.org
T. Praciano-Pereira	**Dep. de Matemática**

alun@:

Univ. Estadual Vale do Acaraú	10 de junho de 2008
página da disciplina	http://www.edo-metodos.sobralmatematica.org
Documento escrito com LaTeX	sis. op. Debian/Gnu/Linux

Por favor, prenda esta *folha de rosto* na sua solução desta lista, deixando-a em branco. Ela será usada na correção, se você preferir o método medieval de entrega.

As listas podem ser respondidas eletrônicamente, analise a informação sobre a entrega de arquivos.

Tudo que você escrever em papel estará perdido e provoca poluição, o que você escrever eletronicamente, poderá re-utilizar posteriormente em outro trabalho.

As questões discursivas tem o objetivo de conduzí-l@ a se tornar um@ autor@ de textos de Matemática. Escreva livremente, é escrevendo que se aprende a escrever, (também lendo, é claro).

Aprenda a usar LaTeX , para escrever matemática.

1 Assunto: Derivadas parciais, plano tangente

objetivo: Conduzir @ alun@ a dominar gradientes, jacobianas, derivação parcial e implícita, determinação das equações das variedades lineares tangentes, e mudanças de variáveis, campo vetorial, gráficos com apoio computacional.

Apresentar os primeiros exemplos de equações diferenciais ordinárias e suas soluções. Alertar para re-aquecer sua experiência com computação.

A lista está estruturada como um tutorial, cada questão contribui para uma compreensão da que vem depois.

A parte discursiva das questões tem o objetivo conduzí-l@ a ser um@ autor@ de textos matemáticos. Escreva livremente.

palavras chave: jacobiana, gradiente, derivadas parciais, variedades lineares tangentes, produto escalar, campo vetorial.

1. Equação da reta no espaço $\mathbf{R}^2$

   (a) A equação da reta

   A equação de uma reta que passa na origem, no plano, se expressa como o produto escalar de um vetor (A, B) por um vetor posição (x, y) arbitrário da reta. Identifique quais das opções abaixo são corretas.

equação	vetor perpendicular	reta passa em
a) $Ax + By = 0$	(B, A)	$(0, 0)$
b) $Ax + By = 0$	(A, B)	$(0, 1)$
b) $Ax + By = A$	$(-A, -B)$	$(0, \frac{A}{B})$
d) $Ax + By = 0$	$(-A, -B)$	$(0, 1)$
e) $Ax + By = 0$	(A, B)	$(0, 0)$

   (b) Identifique o gráfico que corresponde à equação da reta r, $Ax+By = 0$ e o vetor (A, B) na figura (1) página 2,

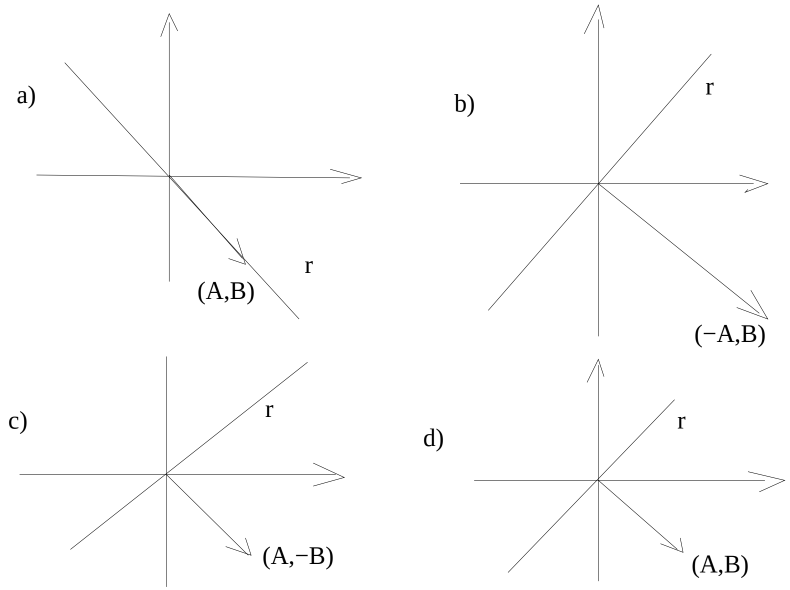

Figura 1: $Ax + By = 0$

   (c) Se $Ax + By = C$ é a equação de uma reta $\underline{r}$ identifique quais das afirmações abaixo são corretas.

equação	relação com r
a) $Ax + By = 0$	perpendicular
b) $Ax - By = 0$	paralela
c) $Ax + By = 10$	perpendicular
d) $Ax - By = 10$	paralela
e) $Ax + By = 10$	paralela
f) $Ax + By = -10$	paralela

   (d) Se $Ax + By = C$ é a equação de uma reta $\underline{r}$ identifique quais das afirmações abaixo são corretas.

equação	relação com r
a) $y = Ax + B0$	é uma equação equivalente
b) $By = -Ax$	é uma equação equivalente
c) $y = \frac{A}{B}x$	é uma equação equivalente
d) $y = -\frac{A}{B}(x - a) + C$	equação de uma paralela
e) $y = m(x - a) + b; m = -\frac{A}{B}$	paralela
f) $y = m(x - a) + b; m = -\frac{A}{B}$	paralela passando por (a, b)

(e) Discursiva, (agilidade e experiência)

Ganhe agilidade, escolha 100[1] vetores no plano e escreva as equações de retas perpendiculares a estes vetores expressando-as sempre no formato indicado a seguir. Em cada caso escolha um ponto no plano por onde a reta passa, compare as equações abaixo.

$$y = f(x) = b + m(x - a) \tag{1}$$

$$y = b + m(x - a) \tag{2}$$

(f) Apoio computacional

Se $Ax + By + C = 0$ for a equação da reta $\underline{r}$ quais dos códigos abaixo produz o gráfico de $\underline{r}$ no terminal do `gnuplot`.

Teste sua solução usando `gnuplot` com a equação no formato da equação (1).

i.
```
A = 3; B = -5; C = 2; m = A/B; b = -C/B
f(x) = m*(x-a) + b
plot f(x)
```
ii.
```
A = 3.0; B = -5; C = 2; m = A/B; b = -C/B
f(x) = m*(x-a) + b
plot f(x)
```
iii.
```
A = 3; B = -5.0; C = 2; m = A/B; b = -C/B
f(x) = m*(x-a) + b
plot f(x)
```
iv.
```
A = 3; B = -5.0; C = 2; m = A/B; b = -(Aa)/B -C/A
f(x) = m*(x-a) + b
plot f(x)
```

(g) Quando a reta não passar na origem

Se uma reta não passar pela origem, ainda assim ela é paralela a uma outra reta que passa pela origem (supondo válido o 5ºpostulado...). Identifique qual é a equação geral da reta no plano entre as opções abaixo

i. $< (A, B), (x, y) >= 0 \equiv Ax + By + C = 0$
ii. $< (A, -B), (x, y) >= -C \equiv Ax + By + C = 0$

[1] ao sentir que já domina o assunto pode parar antes da centésima

iii. $< (-A, B), (x, y) >= -C \equiv Ax + By + C = 0$
iv. $< (A, B), (x, y) >= -C \equiv Ax + By + C = 0$

2. Equação do plano

(a) Qual das afirmações abaixo identifica um plano no espaço tridimensional.

i. é o lugar geométrico dos pontos (x, y, z) do espaço $\mathbf{R}^3$ tal que
$$< (-A, -B, -C), (x, y, z) >= 0 \tag{3}$$
ii. é o lugar geométrico dos pontos (x, y, z) do espaço $\mathbf{R}^3$ tal que
$$< (A, -B, C), (x, y, z) >= 0 \tag{4}$$
iii. é o lugar geométrico dos pontos (x, y, z) do espaço $\mathbf{R}^3$ tal que
$$< (-A, B, -C), (x, y, z) >= 0 \tag{5}$$
iv. é o lugar geométrico dos pontos (x, y, z) do espaço $\mathbf{R}^3$ tal que
$$< (A, B, C), (x, y, z) >= 0 \tag{6}$$

(b) Se $Ax + By + Cz + D = 0$ determine quais das afirmações abaixo estão corretas

i. é o lugar geométrico dos pontos do (x, y, z) do $\mathbf{R}^3$ perpendiculares ao vetor (A, B, C).
ii. é a equação de um plano paralelo ao plano cuja equação é $Ax + By + Cz = 0$.
iii. é o lugar geométrico dos pontos do (x, y, z) do $\mathbf{R}^3$ perpendiculares ao vetor $(-A, -B, -C)$.
iv. é o lugar geométrico dos pontos do (x, y, z) do $\mathbf{R}^3$ paralelos ao vetor (A, B, C).

(c) Escolha 100[2] vetores no espaço $\mathbf{R}^3$ e escreva as equações de planos perpendiculares a cada um deles, alguns dos quais você irá escolher de modo que não passe na origem.

(d) Apoio computacional

Você pode obter gráficos de planos com `gnuplot`, o comando é
```
splot f(x,y)
```
em que a equação deve estar no formato
```
f(x,y) = C + Ax + By
```
depois, com o ratinho, você pode rodar a imagem para procurar entender como ela é. Se você pedir o gráfico:

[2] O objetivo não é trabalho braçal, ao ter certeza de que sabe o que está fazendo, pode parar antes de chegar ao marco 100. A decisão é sua.

```
splot 0, f(x,y)
```
você terá o gráfico do plano XOY como referência. O comando
```
setarrow a,b,c rto d,e,f
```
desenha o segmento (vetor) com extremidades $(a,b,c),(d,e,f)$ que pode ajudar a visualisar a imagem.

3. Distância de um plano a origem

Sabemos que uma equação $S(x,y,z)=0$ não se altera se for multiplicada por um número diferente de zero. Multiplique

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

por um `número conveniente` de modo que o vetor perpendicular ao plano na equação seja unitário. Comparando com a equação do plano paralelo que passa na origem, deduza qual a distâcia do plano

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

para a origem. Escreva suas conclusões no formato "Teorema e demonstração".

4. Equação da reta no espaço - dim. maior do que 2

(a) Que tipo de objeto é representado por cada uma das equações

$$Ax+By+D=0 \tag{7}$$
$$Ax+Bz+D=0 \tag{8}$$
$$Ay+Bz+D=0 \tag{9}$$

(b) Qual é a dimensão do objeto representado pelas equações (7) , (8) , (9) ?

(c) As questões anteriores mostram que não podemos ter uma forma simples para a equação da reta em dimensão maior que 2. A saída para simplificar as equações de variedades de dimensão 1 no espaço de dimensão maior ou igual a 3 consiste em usar equações paramétricas.

Encontre as equações paramétricas da reta paralela ao vetor $(1,-1,3)$ que passa pelo ponto $(2,2,2)$. Sugestão: primeiro encontre as equações paramétricas da reta que passa na origem, depois faça a translação (mudança de variáveis) para o ponto $(2,2,2)$.

(d) Escolha 100[3] vetores no espaço junto com 100 outras condições e escreva, em cada caso, as equações paramétricas das retas determinadas por estes 100 pares de condições.

Escolha algumas que passem em pontos escolhidos do espaço.

[3] depois que tiver certeza que entendeu pode para antes da centésima, mas não se engane.

(e) Questão discursiva

Escreva a equação geral (as equações parametricas gerais) de uma reta, especifique os dados iniciais corretamente. Redija no formato "Teorema e demonstração".

5. Curvas não retas - variedades de dimensão 1

(a) Como as retas, a melhor forma para representar uma curva no espaço são as suas equações paramétricas. Se as equações não forem lineares, você terá uma curva - não reta. Usando `gnuplot` obtenha as imagens das curvas

$$(cos(t), sin(t), 1)\ ;\ t \in [-2\pi, 2\pi] \tag{10}$$
$$(cos(t), sin(t), t)\ ;\ t \in [-2\pi, 2\pi] \tag{11}$$
$$(t, 1+2t+t^2, t)\ ;\ t \in [-2\pi, 2\pi] \tag{12}$$

(b) As equações

$$x_k = f_k(t)\ ;\ k \in \{1, \cdots, n\}\ ;\ t \in [a,b] \tag{13}$$

em que f_k é uma função diferenciável para cada valor do índice k, são as equações paramétricas de uma curva no $\mathbf{R}^n$, parametrizadas no intervalo $[a,b]$. Calcule a expressão do vetor tangente à esta curva no ponto

$$a_k = f_k(t_0)\ ;\ k \in \{1, \cdots, n\} \tag{14}$$

dado $t_0 \in [a,b]$.

(c) Para cada uma das equações (10) , (11) , (12) encontre o vetor tangente no ponto $t \in \{-1,1,2\}$. Observe que estes vetores se encontram na origem (a derivada está sempre relacionada à origem), para obter um vetor tangente á curva é preciso transladá-lo para o ponto que corresponde ao vetor posição. Faça isto em todos os casos solicitados.

(d) sentido positivo é o anti-horário Encontre equações paramétricas do círculo trigonômetrico, e derivando mostre que o sentido natural de percurso é o anti-horário.

6. Derivada implícita

Encontre a equação do plano tangente ao gráfico da função

$$z = f(x,y) = x^2 + 3xy + y^3 \tag{15}$$

no ponto $(2,3,49)$

7. Escolha 100 funções, para cada uma delas calcule um ponto no gráfico e determine a equação do plano tangente em cada caso, mas pode parar antes da centésima se tiver certeza de que entendeu todo o processo.

8. Considere a curva plana

$$\gamma = (x(t), y(t)) = (3t, 4-2t) \; ; \; t \in [-3,3] \tag{16}$$

e a superfície

$$graf(f) \; ; f(x,y) = x^2 + y^2$$

Encontre o vetor tangente à imagem de γ sobre a superfície correspondente ao valor $t_0 = 2 \in [-3,3]$ do parâmetro.

9. Para cada uma das funções definidas abaixo, calcule as equações paramêtricas da imagem da curva

$$\gamma = (x(t), y(t)) = (3t, 4-2t) \; ; \; t \in [-3,3] \tag{17}$$

sobre a superfície $graf(f)$

$$\text{a)} f(x,y) = x^2 - 2xy + y^3 ; \text{b)} f(x,y) = x^2 - y^2 \tag{18}$$

10. campo vetorial tangente a uma curva Considere a curva plana

$$\gamma = (x(t), y(t)) = (tcos(t), tsen(t)) \; ; \; t \in [0, 2\pi] \tag{19}$$

e a superfície

$$graf(f) \; ; f(x,y) = x^2 + y^2$$

Encontre os vetores tangentes à imagem desta curva na superfície $graf(f)$ com $f(x,y) = x^2 + y^2$ para os valores do parâmetro iniciando em $t_0 = 0$ até $t_n = 2\pi$ com passo 0.2 e obtenha o gráfico com `gnuplot` deste campo vetorial. Objetivo: ver a sugestão da imagem da curva na superfície que se encontra na figura (2) página 8, mas, feito com `gnuplot`, você terá a chance de rodar o gráfico usando o *ratinho*.

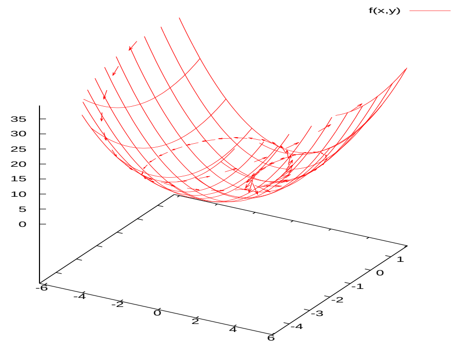

Figura 2: Campo vetorial - aproximação de curva