Equações Diferenciais Ordinárias e Métodos revisão
T. Praciano-Pereira
Lista 06 - ap03
tarcisio@member.ams.org
Dep. de Matemática

alun@:

Univ. Estadual Vale do Acaraú 15 de janeiro de 2009

Documento escrito com LaTeX sis. op. Debian/Gnu/Linux

Por favor, se você for usar o método medieval para entrega de trabalhos, em papel, prenda esta *folha de rosto* na solução desta lista, preenchendo-a com seus dados. Se você quiser entregar o trabalho eletrônicamente, envio-o por e-mail ou entregue-o em CD na Secretaria do Curso de Matemática.

Por favor , siga as instruções sobre nomes de arquivos:

`edo_seue-mail_XX.pdf`

`XX` é `06` para esta lista, e `pdf` é o tipo de formatação que você der ao seu trabalho.

Data da entrega da lista: dia 26 de Janeiro de 2009.

Se o trabalho for feito em equipe, é suficiente entregar um arquivo (ou em papel, uma cópia) e no cabeçalho todos @s membros da equipe devem estar identificados com nome e e-mail.O número de membros de uma equipe não deve ultrapassar três.

1 Orientação

O texto para trabalhar com esta lista (tutorial) é o capítulo 3 das ninhas notas de aula que se encontram na página

http://www.edo-metodos.sobralmatematica.org/textos/

Objetivo: Entender os operadores lineares que justificam a razão do nome (e da forma de resolver) as equações diferenciais lineares.

Já vimos em aula que a função $y = e^{at}$ é uma solução de uma equação diferencial chamada linear, isto se vê ao substituir, por exemplo na equação

$$\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = 0 \tag{1}$$

que ela se transforma num produto

$$(\alpha a^2 + \beta a + \gamma)e^{at} = 0 = P(t)e^{at} \tag{2}$$

donde concluirmos que $y = e^{at}$ é uma solução se $t = a$ for uma solução da equação característica

$$P(t) = 0 \tag{3}$$

As equações diferenciais lineares são consideradas as mais importantes equações com que lidamos, em parte porque vários dos fenômenos da natureza são “quase” lineares ou, quando não são lineares, tem uma componente linear que ao ser resolvida dá *uma parte da solução*. É parecido com o caso do diferencial, usamos *uma variedade linear* como aproximação de uma *variedade não linear*.

Também temos a sensação de que o caminho para resolver as equações não lineares passa pela solução de uma linear que lhe é associada, as equações não lineares seriam “equações lineares perturbadas”. Finalmente as equações lineares são as que a gente sabe resolver (quando sabe), e quando não soubermos, pelo menos podemos ter uma visão geral do que poderia ser a solução.

Quando você dominar o assunto, quer dizer, quando você souber que ainda tem muito para aprender, você poderá rir um pouco desta introdução, neste momento você será um especialista em equações diferenciais e terá um instrumento poderoso nas mãos, é quando você vai ver que a importância das equações diferenciais não lineares e a sua forte presença na natureza.

Umas das técnicas importantes no estudo destas equações consiste na representação matricial das mesmas, é neste momento que vale a afirmação feita acima, as matrizes (funcionais) nos dão uma visão de como poderia ser a solução das equações. *Matrizes funcionais* não vão aparecer nesta lista.

Nesta lista: construção da expressão matricial das equações lineares e um exemplo de equação não linear que modela um problema importante.

palavras chave: cabo suspenso, catenária, equações diferenciais exatas, equações diferenciais lineares, extremos, máximos, mínimo, operador linear, polinômio característico de uma equação diferencial linear, solução aproximada.

2 Exercícios

Equações diferenciais lineares ou não

A curva de um cabo suspenso. Desde o século 17 que se procurava descobrir qual era a curva algébrica descrevendo um cabo suspenso, ou uma corrente suspensa entre dois suportes.

Esta curva já era chamada de *catenária*, palavra latina que significa *corrente*. Galileo imaginava que fosse uma parábola mas foram

Leibniz, Christiaan Huygens, e Johann Bernoulli que derivaram a expressão desta curva usando métodos que hoje interpretamos como de equações diferenciais.

1. A curva de um cabo suspenso[1] - Catenária Um cabo de aço é uniforme e cada metro dele pesa K quilos. Suponha que o cabo seja perfeitamente flexível (para que possa formar qualquer curva) - uma aproximação da realidade. O detalhe, na figura (1) página 3, mostra as forças envolvidas no cabo suspenso.

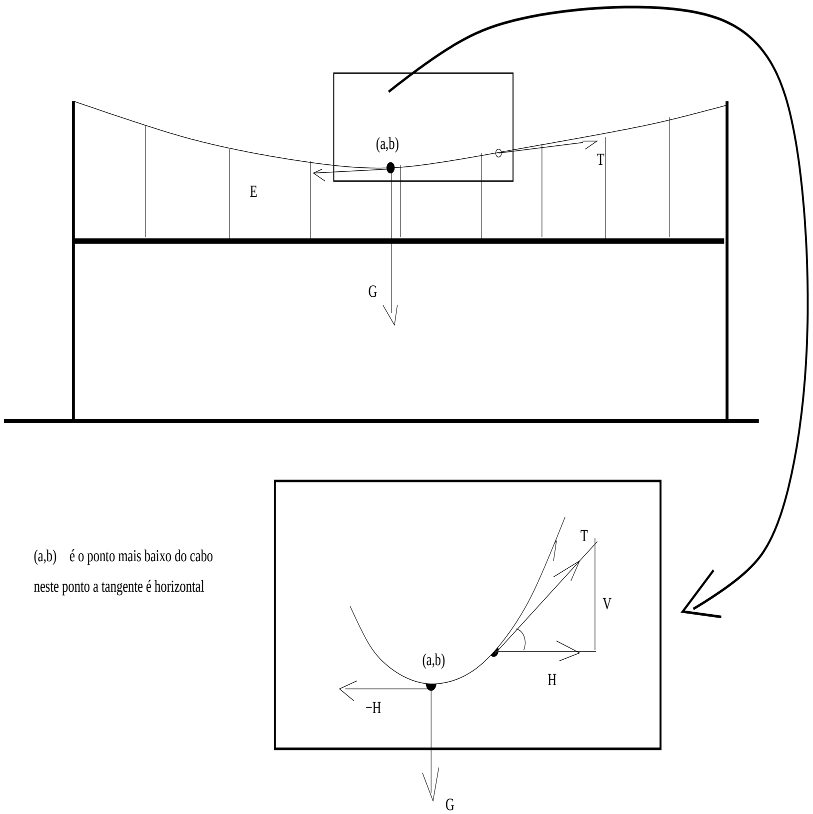

Figura 1: A catenaria, ponte ou fio de energia elétrica

   (a) (V)[ ](F)[ ] Como o cabo se encontra em equilíbrio estático, então a tensão ao longo do cabo anula a força da gravidade.

   (b) (V)[ ](F)[ ] Como o cabo se encontra em equilíbrio estático, então uma componente da tensão ao longo do cabo anula a força da gravidade.

   (c) (V)[ ](F)[ ] A tensão ao longo do cabo age tangencialmente e tem duas componentes uma das quais anula a força da gravidade.

2. Análise de um pequeno segmento do cabo. Considere um cabo suspenso como descrito no exercício 1.

   (a) (V)[ ](F)[ ] Considere um pequeno segmento do cabo como função do seu comprimento s medido a partir de uma das extremidades que se encontram presas, figura (2) página 4, $T(s)$ representando tensão (força) atuando no ponto s do

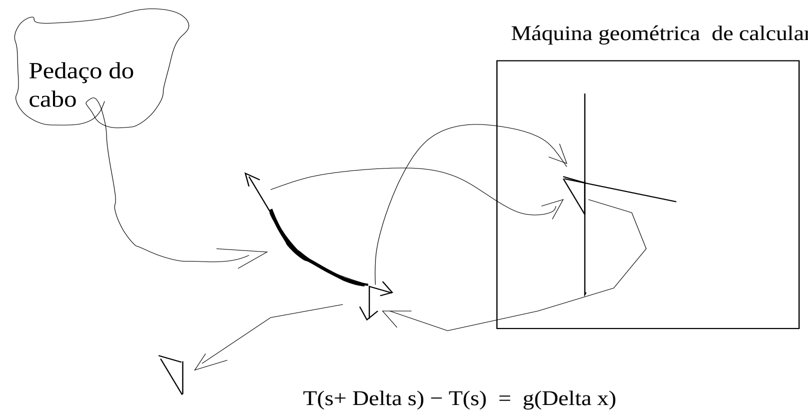

Figura 2: Um segmento da catenária

   cabo, então

$$\frac{T(s+\Delta s)-T(s)}{\Delta s} = -g\Delta s$$

   quer dizer, $T(s+\Delta s), -T(s)$, para pequenos valores de Δs são "aproximadamente" inversas[2] e o "erro" na diferença é peso do segmento de cabo.

   (b) (V)[ ](F)[ ] Considere um pequeno segmento do cabo como função do seu comprimento s medido a partir de uma das

[2] A soma é quase nula.

extremidades que se encontram presas, figura (2) página 4, $T(s)$ representando tensão (força) atuando no ponto s do cabo, então

$$T(s+\Delta s) - T(s) = -g\Delta s$$

quer dizer, $T(s+\Delta s), T(s)$, para pequenos valores de Δs são "aproximadamente" inversas e o "erro" na diferença é o peso do segmento de cabo.

(c) (V)[ ](F)[ ] Considere um pequeno segmento do cabo como função do seu comprimento s medido a partir de uma das extremidades que se encontram presas, figura (2) página 4, $T(s)$ representando tensão (força) atuando no ponto s do cabo, então

$$T(s+\Delta s) - T(s) = -g\Delta s$$

quer dizer, $T(s+\Delta s), T(s)$, para pequenos valores de Δs são "aproximadamente" inversas e o "erro" na diferença é a quantidade de energia do cabo representada pelo segmento considerado vezes o peso deste segmento de cabo.

3. Catenária Considere um cabo de aço, uniforme, como descrito na questão 1, A figura (1) página 3, mostra as forças envolvidas no cabo suspenso.

(a) (V)[ ](F)[ ] A variação da tensão $T'(s)$, ao longo do cabo age tangencialmente sendo diferente de ponto para ponto em função do comprimento do cabo, medido a partir de uma das extremidades presas.

(b) (V)[ ](F)[ ] A tensão $T'(s)$, ao longo do cabo age tangencialmente sendo a mesma em qualquer ponto do cabo.

(c) (V)[ ](F)[ ] O peso acumulado (uma quantidade de energia) do cabo, desde uma das extremidades presas do cabo, (considerando-se $s_0 = 0$) até um ponto s no cabo é dado por

$$G(s) = \int_0^s w(t)dt$$

em que $w(s)$ é a *densidade média local de massa* do cabo. Se o cabo for uniforme, $w(s)$ é uma função constante.

(d) (V)[ ](F)[ ] A variação da tensão $T'(s)$, ao longo do cabo age tangencialmente. Se θ designar o ângulo entre a horizontal e tangente, figura (1), página 3, e $G(s)$ o peso (acumulado) no ponto s, então

$$T'(s) * tan(\theta) = -G(s)$$

(e) (V)[ ](F)[ ] A variação da tensão $T'(s)$, ao longo do cabo age tangencialmente. Se θ designar o ângulo entre a horizontal e tangente, figura (1), página 3, e $G(s)$ o peso (acumulado) no ponto s, então

$$T'(s) * sen(\theta) = -G(s)$$

(f) (V)[ ](F)[ ] A variação vertical da tensão, em resposta ao peso do cabo, figura (1), página 3, como função do comprimento s medido a partir de uma das extremidades que se encontram presas, então

$$T'(s)H = -G(s)$$

em que H é a tensão horizontal que é constante.

(g) (V)[ ](F)[ ] A equação diferencial que descreve a *catenaria* é

$$T''(s)H = w(s)\sqrt{1+T'(s)^2}$$

em que H é a tensão horizontal, é constante, e $\int_{s_0}^{s} \sqrt{1+T'(t)^2}$ mede o comprimento do cabo a partir de uma das extremidas presas.

(h) (V)[ ](F)[ ] A equação diferencial que descreve a *catenaria* é uma equação diferencial linear de segunda ordem.

(i) (V)[ ](F)[ ] A equação diferencial que descreve a *catenaria* é uma equação diferencial não linear de segunda ordem.

(j) (V)[ ](F)[ ] A equação diferencial que descreve a *catenaria* é uma equação diferencial não linear de segunda ordem e de quarto grau.

(k) (V)[ ](F)[ ] A equação diferencial que descreve a *catenaria* é uma equação diferencial não linear de segunda ordem e de segundo grau.

4. Aplicação em segurança

(a) (V)[ ](F)[ ] A tensão horizontal, H, figura (1), página 3, é uma constante.

(b) (V)[ ](F)[ ] Se o cabo estiver em perfeitas condições, mas a tensão for muito grande (além da especificação do cabo), e ele se romper, o ponto provável de rompimento é $P = (a, b)$, o ponto crítico, onde tensão tangencial muda de sentido.

(c) (V)[ ](F)[ ] Se o cabo estiver em perfeitas condições, mas a tensão for muito grande (além da especificação do cabo), os pontos mais prováveis para o rompimento do cabo, se for homogêneo, são os dois pontos em que ele se encontra preso aos suportes, onde a tensão é máxima.

(d) (V)[ ](F)[ ] A catenária descreve a tensão nos arcos de pontes.

(e) (V)[ ](F)[ ] A catenária descreve a tensão nos fios suspensos de distribuição de energia elétrica entre dois postes quaisquer.

5. Operador diferencial - polinômio característico Considere a equação diferencial

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{4}$$

em que p, q são duas constantes. Usando a notação D para o operador derivada, quer dizer:

$$D^0(f) = f = I(f) \text{ ; a identidade} \tag{5}$$
$$D(f) = f' \text{ ; a derivada de primeira ordem} \tag{6}$$
$$D^n(f) = f^{(n)} \text{ ; a derivada de ordem } n \tag{7}$$

(a) (V)[ ](F)[ ] A seguinte sucessão de cálculos

$$P(D)(y) = D(D(y)) + pD(y) + qD^0(y) = 0 \tag{8}$$
$$P(D)(y) = D^2(y) + pD(y) + qD^0(y) = 0 \tag{9}$$
$$P(D)(y) = D^2(y) + pD(y) + qI(y) = 0 \tag{10}$$
$$P(D)(y) = D^2(y) + pD(y) + q(y) = 0 \tag{11}$$
$$P(t) = t^2 + pt + q \tag{12}$$

mostra que podemos expressar a equação diferencial (4) como

$$P(D)(y) = 0$$

(b) (V)[ ](F)[ ] O polinômio P é o polinõmio característico da equação diferencial,

$y' + 4y = 0 \quad P(t) = t + 4$

(c) (V)[ ](F)[ ] O polinômio P é o polinõmio característico da equação diferencial,

$y'' + 3y' + y = 0 \quad P(x) = x^2 + 3x$

(d) (V)[ ](F)[ ] O polinômio P é o polinõmio característico da equação diferencial,

$y''' + 3y' + y = 0 \quad P(x) = x^3 + 3x + 1$

(e) (V)[ ](F)[ ] O polinômio P é o polinõmio característico da equação diferencial,

$y'' - y = 0 \quad P(x) = x^2 - 1$

(f) (V)[ ](F)[ ] O Polinômio P é o polinômio característico que aparece quando substuimos $y = e^{at}$ na equação diferencial, por exemplo na equação (4).

(g) (V)[ ](F)[ ] $P(D)$ é um operador (diferencial) linear, em que P é o polinômio característico da equação difererencial linear.

6. Selecione a opção verdadeira (e justifique)

(a) (V)[ ](F)[ ] $y'' - y = 0 \quad P(x) = x^2 - 1 \quad P(x)e^{ax} = 0$

(b) (V)[ ](F)[ ] $y'' + x^2y'x^3y = 0$ é uma equação diferencial linear com coeficientes variáveis.

(c) (V)[ ](F)[ ]

$y'' - y = 0 \quad P(t) = x^2 - 1 \quad P(D)(e^{-t}) = 0, P(D)(e^t) = 0$

7. Uma equação diferencial de ordem n é equivalente a um sistema de n equações de primeira ordem. No caso das equações diferenciais lineares esta tradução é prática (conduz a uma solução ou uma compreensão do significado da equação). Para obter a matriz introduzimos n variáveis temporárias, $y, z, w, \ldots$ de tal modo que

$$z = y'; w = z'; \ldots \tag{13}$$

e rescrevemos a equação usando as variáveis temporárias de modo a obter um produto matricial da forma

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ w \end{pmatrix}' \tag{14}$$

que reproduz a equação linear

$$y' = ay$$

de uma variável, agora com uma matriz em lugar do número $\underline{a}$. Identifique abaixo qual foi a transformação correta em que o sistema de equações diferenciais de primeira ordem é equivalente a equação dada.

(a) (V)[ ](F)[ ] $y''' + 3y = 0$

$$\begin{cases} z & = y' \\ w & = z' \\ 3y & = -w' \end{cases} \tag{15}$$

(b) (V)[ ](F)[ ]] $y'' + 2y' + 4y = 0$

$$\begin{cases} z & = y' \\ 4y + 2z & = -z' \end{cases} \tag{16}$$

(c) (V)[ ](F)[ ] $y'' - y' + y = 0$

$$\begin{cases} z & = y'' \\ y & = z' - y \end{cases} \tag{17}$$

(d) (V)[ ](F)[ ] $3xy'' + 3y' + 4y = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ 3tz \end{pmatrix} \tag{18}$$

(e) (V)[ ](F)[ ] $y''' + y'' + y' + y = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} \tag{19}$$

(f) (V)[ ](F)[ ] $\frac{1}{x}y''' + y' = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ z' \\ -w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ -w \end{pmatrix}' \tag{20}$$

8. Aplicação A figura (3) página 10, mostra o resultado de taxas de variação horizontal e vertical colhidas aproximadamente nos pontos de uma malha cobrindo uma região Ω.

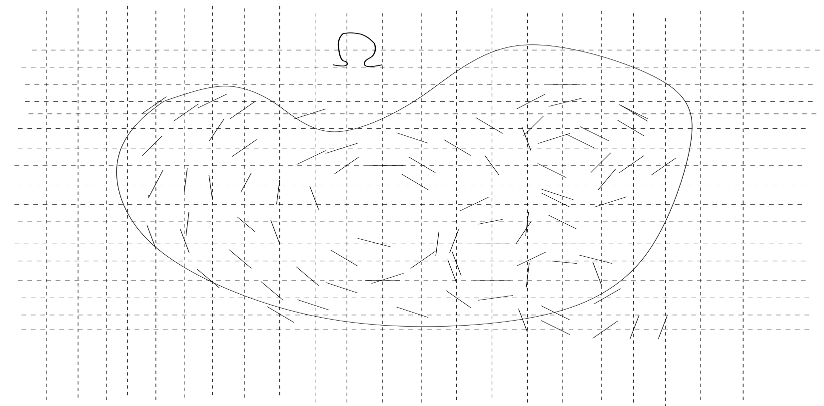

Figura 3: Campo vetorial

(a) (V)[ ](F)[ ] Podemos deduzir que há três pontos de mínimo para a quantidade medida na região Ω.

(b) (V)[ ](F)[ ] Podemos deduzir que há três pontos extremos para a quantidade medida na região Ω.

(c) (V)[ ](F)[ ] Podemos deduzir que há três pontos de máximo para a quantidade medida na região Ω.

(d) (V)[ ](F)[ ] Podemos deduzir que há quatro pontos extremos para a quantidade medida na região Ω.

(e) (V)[ ](F)[ ] Podemos deduzir que há quatro pontos de mínimo para a quantidade medida na região Ω.

(f) (V)[ ](F)[ ] Podemos deduzir que há quatro pontos de máximo para a quantidade medida na região Ω.