Equações Diferenciais Ordinárias	**Lista 05**
equações dif. exatas	tarcisio@member.ams.org
T. Praciano-Pereira	**Dep. de Matemática**
alun@:	
Univ. Estadual Vale do Acaraú	4 de janeiro de 2009
Documento processado com LaTeX	sis. op. Debian/Gnu/Linux

1 Informações

Por favor, se você usar o método medieval para entrega desta lista, em papel, prenda esta *folha de rosto* na solução, preenchendo-a com seus dados.

Se você quiser entregar o trabalho eletrônicamente, por e-mail, use o meu endereço eletrônico ou entregue em CD na secretária do Curso de Matemática. Arquivo, preferencialmente, em pdf

Procure o link "entrega de trabalhos". Siga as instruções sobre nomes de arquivos:

`edo_seu_email_XX.pdf`

`XX` é `05` para esta lista, e `pdf` é o tipo de formatação que você der ao seu trabalho. Você pode obter o formato `pdf` a partir de um documento escrito em `open office` ou como resultado da compilação de LaTeX .

Data da entrega da lista: dia 12 de Janeiro, segunda-feira. Se o trabalho for feito em equipe, *basta entregar um trabalho* e neste caso tod@s @s alun@s devem estar identificad@s com nome e e-mail no cabeçalho do trabalho.

2 Orientação

objetivo: Resolver equações diferenciais exatas. Leitura básica: capítulo 02 de minhas notas de aula.

palavras chave: equações diferenciais exata, fator integrante, variedade de nível.

3 Exercícios

1. $z = F(x, y)$ sendo uma função duaz vezes contínuamente diferenciável em uma região aberta Ω do domínio, então

   (a) (V)[ ](F)[ ] O gráfico de F tem um plano tangente em qualquer ponto $(a, b, F(a, b))$; $(a, b) \in \Omega$ que é possível deduzir da derivada implícita de F com as substituições

$$B = \frac{\partial F}{\partial x}|_{(a,b)} \; ; A = \frac{\partial F}{\partial y}|_{(a,b)} \; ; c = F(a, b) \tag{1}$$
$$dz := (z - c) \; ; \; dx := (x - a) \; ; \; dy := (y - b) \tag{2}$$
$$A(x - a) + B(y - b) + (z - c) = 0 \tag{3}$$

   (b) (V)[ ](F)[ ] O gráfico de F tem um plano tangente em qualquer ponto $(a, b, F(a, b))$; $(a, b) \in \Omega$ que é possível deduzir da derivada implícita de F com as substituições

$$A = \frac{\partial F}{\partial x}|_{(a,b)} \; ; B = \frac{\partial F}{\partial y}|_{(a,b)} \; ; c = F(a, b) \tag{4}$$
$$dz := (z - c) \; ; \; dx := (x - a) \; ; \; dy := (y - b) \tag{5}$$
$$A(x - a) + B(y - b) + (z - c) = 0 \tag{6}$$

   (c) (V)[ ](F)[ ] $F(x, y) = C$ é uma curva de nível[1] da superficie

$$z = F(x, y)$$

   Suponha conhecido um ponto-solução (a, b) de $F(x, y) = C$ então a equação da reta tangente à curva de nível que passa por (a, b) pode ser obtida pelas substituições, derivada implícita de $F(x, y) = C$

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0 \tag{7}$$
$$A = \frac{\partial F}{\partial x}|_{(a,b)} \; ; B = \frac{\partial F}{\partial y}|_{(a,b)} \tag{8}$$
$$dx := (x - a) \; ; \; dy := (y - b) \tag{9}$$
$$B(x - a) + A(y - b) = 0 \tag{10}$$

   (d) (V)[ ](F)[ ] $F(x, y) = C$ é uma curva de nível[2] da superficie

$$z = F(x, y)$$

   Suponha conhecido um ponto-solução (a, b) de $F(x, y) = C$ então a equação da reta tangente à curva de nível que passa por (a, b) pode ser obtida pelas substituições, derivada implícita de $F(x, y) = C$

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0 \tag{11}$$
$$A = \frac{\partial F}{\partial x}|_{(a,b)} \; ; B = \frac{\partial F}{\partial y}|_{(a,b)} \tag{12}$$
$$dx := (x - a) \; ; \; dy := (y - b) \tag{13}$$
$$A(x - a) + B(y - b) = 0 \tag{14}$$

   (e) (V)[ ](F)[ ] - solução de uma equação diferencial exata A expressão *diferencial exata*

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0 \tag{15}$$

   é a *equação diferencial* de qualquer das curvas de nível

$$F(x, y) = C; \; (x, y) \in \Omega \tag{16}$$

   no sentido de que *as equações (15) e (16) ambas representam as curvas de nível da superfície $z = F(x, y)$ para as constantes C que sejam admissíveis.*

[1] variedade não linear de dimensão 1
[2] variedade não linear de dimensão 1

2. Solução de uma equação diferencial exata

   (a) (V)[ ](F)[ ] Dadas duas funções P, Q diferenciáveis em uma região Ω do plano, a expressão
   $$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$
   é uma diferencial exata se e somente se houver uma função
   $$z = F(x, y)$$
   diferenciável, continuamente, duas vezes em Ω tal que
   $$Q(x, y) = \tfrac{\partial F}{\partial x} \; ; P(x, y) = \tfrac{\partial F}{\partial y} \tag{17}$$
   $$\exists\ (a, b) \in \Omega\ \exists C \in \mathbf{R}\ ; F(a, b) = C \tag{18}$$

   (b) (V)[ ](F)[ ] Dadas duas funções P, Q diferenciáveis em uma região Ω do plano, a expressão
   $$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$
   é uma diferencial exata se e somente se houver uma função
   $$z = F(x, y)$$
   diferenciável, continuamente, duas vezes em Ω tal que
   $$P(x, y) = \tfrac{\partial F}{\partial x} \; ; Q(x, y) = \tfrac{\partial F}{\partial y} \tag{19}$$
   $$\exists\ (a, b) \in \Omega\ \exists C \in \mathbf{R}\ ; F(a, b) = C \tag{20}$$

   (c) (V)[ ](F)[ ] - derivadas mistas Dadas duas funções P, Q diferenciáveis em uma região Ω do plano, a expressão
   $$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$
   é uma diferencial exata se e somente se
   $$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \tag{21}$$

   (d) (V)[ ](F)[ ] - derivadas mistas Dadas duas funções P, Q diferenciáveis em uma região Ω do plano, a expressão
   $$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$
   é uma diferencial exata se e somente se
   $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{22}$$

   (e) (V)[ ](F)[ ] solução de uma equação diferencial exata Dadas duas funções P, Q diferenciáveis em uma região Ω do plano, a expressão
   $$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{23}$$
   sendo uma diferencial exata (P, Q satisfazem a equação (22)) então existe uma função
   $$z = F(x, y)$$
   duas vezes continuamente diferenciável em Ω de modo que as curvas de nível $F(x, y) = C$ são as curvas solução da equação diferencial exata (23) para as constantes admissíveis C.

3. Solução de equação diferencial exata

   (a) (V)[ ](F)[ ] Dada a expressão diferencial
   $$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$
   ela será uma equação diferencial exata se e somente se
   $$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

   (b) (V)[ ](F)[ ]
   $$(x + 2y - 2)dx + (2x - y + 3)dy = 0 \tag{24}$$
   é uma equação diferencial exata e suas soluções são as curvas de nivel $F(x, y) = C$ com
   $$F(x, y) = \frac{x^2}{2} - 2x + 2y - \frac{y^2}{2} + 3y$$

   (c) (V)[ ](F)[ ]
   $$(x + 2y - 2)dx + (2x - y + 3)dy = 0 \tag{25}$$
   é uma equação diferencial exata e suas soluções são as curvas de nivel $F(x, y) = C$ com
   $$F(x, y) = \frac{x^2}{2} - 2x + 2xy - \frac{y^2}{2} + 3y$$

   (d) (V)[ ](F)[ ] A equação
   $$(x + y - 4)dx + (x + y + 2)dy = 0 \tag{26}$$
   é exata e a sua solução é a função
   $$F(x, y) = \frac{x^2}{2} - 4x + xy + 2y + \frac{y^2}{2}$$

(e) (V)[ ](F)[ ] A equação

$$(x + y - 4)dx + (x + y + 2)dy = 0 \tag{27}$$

é exata e as suas soluções são as curvas de nível $F(x, y) = C$

$$F(x, y) = \frac{x^2}{2} - 4x + xy + 2y + \frac{y^2}{2}$$

(f) (V)[ ](F)[ ]

$$(2x^3 + 6xy^2 - 2y^3 + 4x + 3y)dx + (6x^2y - 6xy^2 - 4y^3 + 3x - 2y)dy = 0 \tag{28}$$

é uma equação diferencial exata tendo por solução as curvas de nível de

$$F(x, y) = \frac{x^4}{2} + 3x^2y^2 - 2xy^3 + 2x^2 + 3xy - y^2 - y^4$$

(g) (V)[ ](F)[ ]

$$(2x^3+6y^2-2y^3+4x+3y)dx+(6x^2y-6y^2-4y^3+3x-2y)dy = 0 \tag{29}$$

é uma equação diferencial exata tendo por solução as curvas de nível de

$$F(x, y) = \frac{x^4}{2} + 3x^2y^2 - 2xy^3 + 2x^2 + 3xy - y^2 - y^4$$

(h) (V)[ ](F)[ ]

$$(2xcos(y) + e^x cos(y))dx + (x^2 sin(y) - e^x cos(y))dy = 0 \tag{30}$$

é uma equação diferencial exata tendo por solução as curvas de nível de

$$F(x, y) = x^2 sin(y) + e^x cos(y)$$

(i) (V)[ ](F)[ ]

$$(2xsin(y) + e^x cos(y))dx + (x^2 cos(y) - e^x sin(y))dy = 0 \tag{31}$$

é uma equação diferencial exata tendo por solução as curvas de nível de

$$F(x, y) = x^2 sin(y) + e^x cos(y)$$

(j) (V)[ ](F)[ ] - fator integrante A equação diferencial

$$(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy = \tag{32}$$

não é uma equação diferencial exata, mas se multiplicarmos a equação por $\mu(x) = e^x$ vamos obter uma equação diferencial exata.

(k) (V)[ ](F)[ ] - fator integrante A equação

$$(x^2 log(y) + xylog(x) + xy)dx + (\frac{x^3}{y} + x^2 log(x))dy = 0 \tag{33}$$

não é exata, mas se for multiplicada por $\mu(x) = x$ se torna uma equação diferencial exata.

(l) (V)[ ](F)[ ] - fator integrante A equação

$$(x^2 log(y) + xylog(x) + xy)dx + (\frac{x^3}{y} + x^2 log(x))dy = 0 \tag{34}$$

não é exata, mas se for multiplicada por $\mu(x) = \frac{1}{x}$ se torna uma equação diferencial exata.

4. Aplicação - solução aproximada A figura (1) mostra um campo vetorial obtido a partir de dados obtidos numa região aproximadamente retangular onde se definiu uma malha. Em cada nó da malha se obteve a taxa de variação de incidência de um mosquito (dengue) na direção "horizontal" e "vertical" (derivadas parciais) com o que foi feito o gráfico.

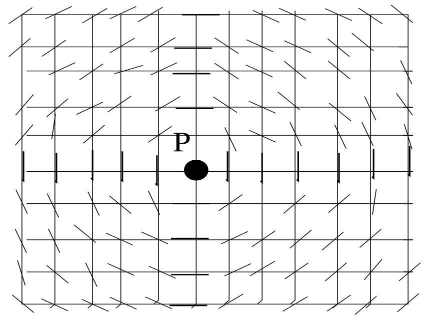

Figura 1: Campo vetorial

(a) (V)[ ](F)[ ] O ponto P marcado na figura (1) representa um foco de alta incidência do mosquito.

(b) (V)[ ](F)[ ] O ponto P marcado na figura (1) representa um ponto em que praticamente não há incidência do mosquito.

(c) (V)[ ](F)[ ] Dependendo dos valores *lidos* nas "*curvas de nível aproximadas*", o ponto P marcado na figura (1) representa um ponto de máximo ou de mínimoo da incidência do mosquito.