Equações diferenciais ordinárias	**Lista 04**
Teorema da Função Implícita	equações diferenciais exatas
T. Praciano-Pereira	**Dep. de Matemática**
alun@:	
Univ. Estadual Vale do Acaraú	23 de novembro de 2008
página da disciplina	www.edo-metodos.sobralmatematica.org
Documento escrito com LaTeX	sis. op. Debian/Gnu/Linux

1 Instruções

Por favor, se você usar o método medieval para entrega desta lista, em papel, prenda esta *folha de rosto* na solução, preenchendo com os seus dados. Ela será usada na correção.

Se você quiser entregar o trabalho eletrônicamente, envie o arquivo para o meu e-mail ou entregue em CD na secretária do Curso de Matemática. Por favor , siga as instruções sobre nomes de arquivos que se encontra na página da disciplina.

Data da entrega da lista: dia 01 de Dezembro, segunda-feira.

Se o trabalho for feito em equipe, basta um único trabalho ser entregue e neste caso, no cabeçalho, devem estar os nomes completos de tod@s @s alun@s junto com os seus respectivos e-mails. O número de membros de uma equipe não deve ser maior do três.

objetivo: *Compreender o Teorema da Função implícita, as suas possibilidades de determinação aproximada de curvas de nível e solução aproximada de equações diferenciais exatas.*

Vamos estudar um tipo de equações diferencias, as chamadas *equações exatas*. Um texto sugerido como leitura é o trabalho de Ana Paula Silva que pode ser encontrado no link, "textos", da página da disciplina.

Leia também o capítulo 2 das minhas notas de aula que podem ser encontradas na página da disciplina, no link "textos".

palavras chave: Teorema da Função Implícita, equações diferenciais exatas, variedade linear tangente, curva de nível, variedade de nível.

2 Equações diferenciais exatas

Nas duas primeiras questões, o objetivo não é interpretar que tipo de objeto, ou gráfico, as equações representam, isto pode ser muito difícil. Não tente, ou tente com `gnuplot`, neste caso uma bôa idéia.

1. dimensão de uma variedade A dimensão de uma variedade, a variedade linear tangente a mesma em um ponto, e o espaço (mínimo) em que as variedades se encontram imersas.

	eq. da variedade	dim da var	dim do espaço
a)(V)[ ](F)[ ]	$(3+2t, 4-5t^2)$; $t \in [0,10]$	dois	dois
b)(V)[ ](F)[ ]	$(3+2t, 4-5t^2)$; $t \in [0,10]$	um	dois
c)(V)[ ](F)[ ]	$(rcos(t), rsin(t), s)$; $t, s \in [-\pi, \pi]$	um	três
d)(V)[ ](F)[ ]	$(rsin(t), rsin(t), s)$; $t, s \in [0,10]$	dois	três
e)(V)[ ](F)[ ]	$(3+t^2, 4-t^2, s)$ $t, s \in [-5,5]$;	três	dois
f)(V)[ ](F)[ ]	$x^2+3xy+y^3=1$	um	dois
g)(V)[ ](F)[ ]	$x^2+3xy+y^3=0$	um	três
h)(V)[ ](F)[ ]	$x^2+3xy+y^3=-1$	um	quatro

2. dimensão de uma variedade A dimensão de uma variedade, a variedade linear tangente a mesma em um ponto, e o espaço (mínimo) em que as variedades se encontram imersas.

	eq. da variedade	dim da var	dim do espaço
a)(V)[ ](F)[ ]	$x^2y+3xz+xy^3=1$	um	dois
b)(V)[ ](F)[ ]	$x^2y+3xz+xy^3=0$	dois	três
c)(V)[ ](F)[ ]	$x^2y+3xz+xy^3=-1$	três	quatro
d)(V)[ ](F)[ ]	$x^2yw+3xz+wxy^3=-1$	três	cinco
e)(V)[ ](F)[ ]	$x^2yw+3xz+wxy^3=-1$	quatro	cinco
f)(V)[ ](F)[ ]	$(t+s, t^2, s); t \in [-5,5]$	um	três
g)(V)[ ](F)[ ]	$(t-s, 1-t^2, s); t, s \in [-5,5]$	dois	três
h)(V)[ ](F)[ ]	$(t^2+s, 4-t^3+s, t)$; $t \in [-5,5]$	um	três
i)(V)[ ](F)[ ]	$(t^2-s, t-t^3+s, -1)$; $t \in [-5,5]$	dois	três
j)(V)[ ](F)[ ]	$(1/(1+t^2), \frac{t}{s}, s)$; $t, s \in [1,10]$	dois	três
k)(V)[ ](F)[ ]	$xyz-yzw+xzw=4$	três	quatro

3. dimensão de variedade

(a) (V)[ ](F)[ ] Existem cinco equações, nas questões (1), (2) que podem ser expressas como

$$[a,b] \xrightarrow{G} \mathbf{R}^3 \ ; G(\theta) = (u(\theta), v(\theta), w(\theta))) \tag{1}$$

(b) (V)[ ](F)[ ] Existem quatro equações, nas questões (1), (2) que podem ser expressas como

$$[a,b] \xrightarrow{G} \mathbf{R}^3 \ ; G(\theta) = (u(\theta), v(\theta), w(\theta))) \tag{2}$$

(c) (V)[ ](F)[ ] Existem quatro equações, nas questões (1), (2) que podem ser expressas como

$$[a,b] \ \text{x} \ [c,d] \xrightarrow{G} \mathbf{R}^3 \ ; G(\theta,\rho) = (u(\theta,\rho), v(\theta,\rho), w(\theta,\rho))) \tag{3}$$

(d) (V)[ ](F)[ ] Existem sete equações, nas questões (1), (2) que podem ser expressas como

$$[a,b] \ \text{x} \ [c,d] \xrightarrow{G} \mathbf{R}^3 \ ; G(\theta,\rho) = (u(\theta,\rho), v(\theta,\rho), w(\theta,\rho))) \tag{4}$$

(e) (V)[ ](F)[ ] Existem três equações, nas questões (1), (2) que podem ser expressas como

$$\Omega \subset \mathbf{R}^3 \xrightarrow{G} \mathbf{R}^4 \, ; G(\theta,\rho,\eta) = (u_1(\theta,\rho,\eta), (u_2(\theta,\rho,\eta), (u_3(\theta,\rho,\eta), (u_4(\theta,\rho,\eta)) \tag{5}$$

(f) (V)[ ](F)[ ] Existem cinco equações, nas questões (1), (2) que podem ser expressas como

$$\Omega \subset \mathbf{R}^3 \xrightarrow{G} \mathbf{R}^4 \, ; G(\theta,\rho,\eta) = (u_1(\theta,\rho,\eta), (u_2(\theta,\rho,\eta), (u_3(\theta,\rho,\eta), (u_4(\theta,\rho,\eta)) \tag{6}$$

(g) (V)[ ](F)[ ] Existem cinco equações, nas questões (1), (2) que podem ser expressas como

$$[a,b] \ \text{x} \ [c,d] \xrightarrow{F} \mathbf{R}^2 \ ; F(r,\theta) = (u(r,\theta), v(r,\theta)) \tag{7}$$

4. Dimensão, função e derivada.

	f	f'
a)(V)[ ](F)[ ]	$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$	$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$
b)(V)[ ](F)[ ]	$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$	$\mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$
c)(V)[ ](F)[ ]	$\mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$	$\mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$
d)(V)[ ](F)[ ]	$\mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$	$\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$
e)(V)[ ](F)[ ]	$\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$	$\mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$
f)(V)[ ](F)[ ]	$\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$	$\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$
g)(V)[ ](F)[ ]	$\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$	$\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$
h)(V)[ ](F)[ ]	$\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$	$\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^6$
i)(V)[ ](F)[ ]	$\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$	$\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^6$
j)(V)[ ](F)[ ]	$\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$	$\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^9$

5. dimensão função e derivada.

(a) (V)[ ](F)[ ] O gráfico da função

$$\mathbf{R}^n :\xrightarrow{f} \mathbf{R}^m \tag{8}$$

é uma variedade de dimensão $n \ \text{x} \ m$

(b) (V)[ ](F)[ ] O gráfico da função

$$\mathbf{R}^n :\xrightarrow{f} \mathbf{R}^m \tag{9}$$

é uma variedade de dimensão $n \ \text{x} \ m - 1$

(c) (V)[ ](F)[ ] O gráfico da função

$$\mathbf{R}^n :\xrightarrow{f} \mathbf{R}^m \tag{10}$$

é uma variedade de dimensão n imersa num espaço de dimensão m

(d) (V)[ ](F)[ ] O gráfico da função

$$\mathbf{R}^n :\xrightarrow{f} \mathbf{R}^m \tag{11}$$

é uma variedade de dimensão $n(m-1)$ imersa num espaço de dimensão nm

(e) (V)[ ](F)[ ] O gráfico de f

$$\mathbf{R}^n :\xrightarrow{f} \mathbf{R}^m \tag{12}$$

é uma variedade linear de dimensão $n + m - 1$.

(f) (V)[ ](F)[ ] supondo que f seja diferenciável, a derivada de

$$\mathbf{R}^n :\xrightarrow{f} \mathbf{R}^m \tag{13}$$

é

$$\mathbf{R}^n :\xrightarrow{f'} \mathbf{R}^{nm} \tag{14}$$

(g) (V)[ ](F)[ ] Supondo f

$$\mathbf{R}^n :\xrightarrow{f} \mathbf{R}^m \tag{15}$$

diferenciável, o gráfico de $f'(a)$, em que $\underline{a}$ é um ponto do domínio de f é uma variedade de dimensão $nm - 1$.

(h) (V)[ ](F)[ ] supondo que f seja diferenciável, a derivada de

$$\mathbf{R}^n :\xrightarrow{f} \mathbf{R}^m \tag{16}$$

no ponto $P = (a_1, \dots, a_n, f(a_1, \dots, a_n))$ é uma variedade linear de dimensão $nm - 1$.

(i) (V)[ ](F)[ ] Se $\mathbf{R}^n :\xrightarrow{T} \mathbf{R}^m$ então o quadro abaixo expressa corretamente a dimensão da imagem de $T'(a)$ em que a é um ponto do domínio de T,

n\m	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12

(j) (V)[ ](F)[ ] Se $\mathbf{R}^n :\xrightarrow{T} \mathbf{R}^m$ então o quadro abaixo expressa corretamente a dimensão do gráfico de T'.

n\m	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	3	4	5
3	3	4	5	6

6. Caminhos sobre variedades - curvas ou variedades de nível

(a) (V)[ ](F)[ ] Uma solução particular $F(a,b) = -2$ para

$$z = F(x,y) = x^3 + 3xy^2 + 2y^2 \tag{17}$$

pode ser obtida dando-se um valor particular para uma das variáveis e resolvendo-se uma equação do terceiro grau.

(b) (V)[ ](F)[ ] Uma solução particular $F(a,b) = -2$ para

$$z = F(x,y) = x^3 + 3xy^2 + 2y^2 \tag{18}$$

pode ser obtida dando-se um valor particular para uma das variáveis e resolvendo-se uma equação do segundo grau.

(c) (V)[ ](F)[ ] Se

$$z = F(x,y) = x^3 + 3xy^2 + 2y^2 \tag{19}$$

então a dimensão da variedade $F(x,y) = -2$ é 1.

(d) Ao derivarmos implicitamente $F(x,y) = -2$ obtemos o modelo para a variedade linear tangente ao gráfico de F no ponto $(a,b,-2)$ supondo-se que conheça uma solução particular para a equação $F(x,y) = -2$

(e) (V)[ ](F)[ ] Supondo que $z = F(x,y)$ é diferenciável, "*Como você calculou as derivadas parciais em um ponto (a,b) dado, de*

$$z = F(x,y) = x^3 + 3xy^2 + 2y^2 \tag{20}$$

então você encontrou uma expressão do tipo"

$$A(x-a) + B(y-b) = 0$$

e pode, assim, calcular

- $y = b + m(x-a)$ ou
- $x = a + n(y-b)$

(f) (V)[ ](F)[ ] Supondo que $z = F(x,y)$ é diferenciável, "*Como você calculou as derivadas parciais em um ponto (a,b) dado, de*

$$z = F(x,y) = x^3 + 3xy^2 + 2y^2 \tag{21}$$

então você encontrou uma expressão do tipo"

$$A(x-a) + B(y-b) = 0$$

e pode, assim, calcular

- $y = b + m(x-a)$ ou
- $x = a + n(y-b)$

se um dos números A, B for diferente de zero.

(g) (V)[ ](F)[ ] Supondo que $z = F(x,y)$ é diferenciável, "*Como você calculou as derivadas parciais em um ponto (a,b) dado, de*

$$z = F(x,y) = x^3 + 3xy^2 + 2y^2 \tag{22}$$

então você encontrou uma expressão do tipo"

$$A(x-a) + B(y-b) = \frac{\partial F}{\partial x}|_{(a,b)}(x-a) + \frac{\partial F}{\partial y}|_{(a,b)}(y-b) = 0$$

e pode, assim, encontrar a equação da reta tangente a uma curva de nível de F no ponto $(a,b,F(a,b))$

- $$y = b + m(x-a) \ ; \ m = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}|_{(a,b)}}{\frac{\partial F}{\partial y}|_{(a,b)}}$$

  ou

- $$x = a + n(y-b) \ ; \ n = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}|_{(a,b)}}{\frac{\partial F}{\partial x}|_{(a,b)}}$$

se uma das derivadas parciais for diferente de zero.

7. Poligonal - aproximação de curva de nível

(a) (V)[ ](F)[ ] Se $z = F(x,y)$ for diferenciável[1] então $F(x,y) = C$ em que C é uma constante apropriada, é uma curva de nível de F para qual podemos encontrar uma reta tangente de equação

$$y = b + \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}(x-a)$$

se a derivada apropriada for diferente de zero e conhecermos uma solução (a,b) para $F(x,y) = C$.

(b) (V)[ ](F)[ ] Se $z = F(x,y)$ for diferenciável então $F(x,y) = C$ em que C é uma constante apropriada, é uma curva de nível de F para qual podemos encontrar uma reta tangente de equação com coeficiente angular

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \text{ ou } \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}$$

se a derivada apropriada for diferente de zero e conhecermos uma solução (a,b) para $F(x,y) = C$.

[1] A diferenciabilidade poderia ser omitida, mas tornaria as questões desta lista muito difíceis.... algumas vezes sem solução.

(c) (V)[ ](F)[ ] Se $z = F(x, y)$ for diferenciável então $F(x, y) = C$ em que C é uma constante apropriada, é uma curva de nível de F para qual podemos encontrar uma reta tangente ao gráfico da curva de nível que passa numa solução $(a, b, F(a, b))$ de $F(x, y) = C$ consequentemente existe uma função diferenciável $y = f(x)$ ou $x = g(y)$ permitindo "explicitar" uma das variáveis na equação $F(x, y) = C$ e conhecemos $f'(a)$ ou $g'(b)$.

8. *Teorema da Função Implícita* - Questão discursiva. Explique a afirmação: "*O método desenvolvido neste tutorial nos permite explicitar, aproximadamente, y como função de x ou recíprocamente, x como função de y*". A partir de uma reta tangente no ponto $(a, b, F(a, b))$ podemos considerar um ponto, (a_1, b_1, c_1) na reta tangente, muito próximo ao ponto de tangência e voltar a resolver o problema com a_1, b_1, c_1 em lugar de a, b, C obtendo uma reta que passa no ponto (a_1, b_1, c_1). Iterando o método vamos obter uma poligonal que é uma aproximação para a curva de nível. Expresse a idéia com um gráfico.

   Baseado nesta afirmação e no passos desenvolvidos acima tente enunciar o *Teorema da Função Implícita* e **depois** procure este teorema num livro de Cálculo e compare com a formulação que você descobriu: você está capacitad@ para descobrir teoremas em Matemática.

Solução: `edox04_01.tex` `edox04_01.gnuplot` que podem ser encontradas na página da disciplína.