Equações Diferenciais Ordinárias	**Lista 03**
Equações a var. sep.	tarcisio@member.ams.org
T. Praciano-Pereira	**Dep. de Matemática**

alun@:

Univ. Estadual Vale do Acaraú	9 de novembro de 2008
Documento processado com LaTeX	sis. op. Debian/Gnu/Linux

1 Informações

Por favor, se você usar o método medieval para entrega desta lista, em papel, prenda esta *folha de rosto* na solução da lista, preenchendo com os seus dados. Ela será usada na correção. Se você quiser entregar o trabalho eletrônicamente, envie o arquivo para o meu e-mail ou entregue em CD na secretária do Curso de Matemática.

Para entrega eletrônica, procure o link "entrega de trabalhos". Siga as instruções sobre nomes de arquivos:

`edo_seu_email_XX.pdf`

`XX` é `03` para esta lista, e `pdf` é o tipo de formatação que você der ao seu trabalho. Você pode obter o formato `pdf` a partir de um documento escrito em `open office` ou como resultado da compilação de LaTeX .

Data da entrega da lista: dia 17 de Novembro, segunda-feira.

Se o trabalho for feito em equipe, basta que seja entregue um trabalho pela equipe, observando que dentro do trabalho devem estar identificados, com nome e e-mail tod@s @s participantes. O limite de número de elementos de uma equipe é três.

2 Orientação

As equações diferenciais são *equações funcionais* envolvendo a operação derivada. Quer dizer que suas incógnitas são "funções" $y = f(x)$. Entre os métodos que foram desenvolvidos para resolver estas equações se encontra a *separação das variáveis* que é uma das aberrações bem sucedidas na linguagem da Matemática. Uma expressão como

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

pode ser decomposta em

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \tag{1}$$

em que dizemos que separamos x, y e na qual podemos ver dois diferenciais exatos - as expressões que aparecem dentro das integrais. Ora, em dx não tem nenhum x, como em dy não tem nenhum y e, além disto, $\frac{dy}{dx}$ não é uma fração o que torna o que acima foi dito uma completa e total aberração, que funciona! Claro, é possível explicar o que acontece com esta "álgebra de diferenciais" mas infelizmente há muita coisa a ser construída até se obter uma linguagem adequada para isto. O assunto se enquadra em *formas diferenciáveis* se você estiver curios@ para saber e procurar.

Leia mais a este respeito nas minhas notas de aula, [capítulo 1[[**?**].

Se soubermos calcular as duas primitivas na equação (1) chegaremos a expressão

$$G(y) = F(x) + C \quad \Leftarrow \quad G'(y) = \frac{1}{g(y)}; F'(x) = f(x)$$

que é a solução da equação diferencial. Se não soubermos calcular as primitivas[1] temos diversos métodos de soluções aproximadas - podemos calcular as duas integrais aproximadamente.

O método funciona, apesar da *aparente* aberração.

objetivo: Solução de equações a variáveis separáveis, modelagem com equações diferenciais ordinárias, operadores diferenciais.

palavras chave: variáveis separáveis, modelagem com equações diferenciais ordinárias, operador diferencial, operador diferencial linear.

[1] Usando o Teorema Fundamental do Cálculo.

3 Exercícios

Exercícios 1 *Variáveis separáveis*

1. **Equações a variáveis separáveis** *Indique a opção verdadeira (equação à variáveis separáveis) e neste caso, como justificação, resolva a equação até onde for possível.*

   (a) (V)[ ](F)[ ] $yy' = x - 2x^3 \implies ydx = (x - 2x^3)dy$ *e assim a equação não é a variáveis separáveis.*

   (b) (V)[ ](F)[ ]

   $$yy' = x - 2x^3 \implies ydy = (x - 2x^3)dx \implies \tag{2}$$
   $$y^2 - x^2 + x^4 = C \tag{3}$$

   uma equação à variáveis separáveis, portanto.

   (c) (V)[ ](F)[ ]

   $$yy' = x - 2x^3 \implies ydy = (x - 2x^3)dx \implies \tag{4}$$
   $$y^2 - x^2 + x^4 = C \tag{5}$$

   uma equação à variáveis separáveis e o domínio de validade destas equações é a faixa do plano correspondente à solução da desigualdade

   $$x^2 - x^4 - C \leq 0$$

   (d) (V)[ ](F)[ ]

   $$yy' = x - 2x^3 \implies ydy = (x - 2x^3)dx \implies \tag{6}$$
   $$y^2 - x^2 + x^4 = C \tag{7}$$

   uma equação à variáveis separáveis tendo por solução as curvas do plano que satisfaçam a equação (7).

   A figura (1) página 3,

   O programa `edox03_01d.gnuplot`*, que se encontra no link "programas" da página, produz as figuras acima e você pode alterar a constante para obter novos gráficos. Ao fazer o gráfico, com* `gnuplot` *faça um zoom no primeiro gráfico restringindo à área visível ao gráfico que você vai obter uma melhor visualização da curva e das curvas subsequentes.*

2. **equações à variáveis separáveis** *Indique a opção verdadeira (equação à variáveis separáveis) e neste caso, como justificação, resolva a equação até onde for possível.*

   (a) (V)[ ](F)[ ] $xy' = ytg(ln(y)) \implies \frac{dx}{ytg(ln(y))} = \frac{dy}{x}$ *e assim a equação não é a variáveis separáveis.*

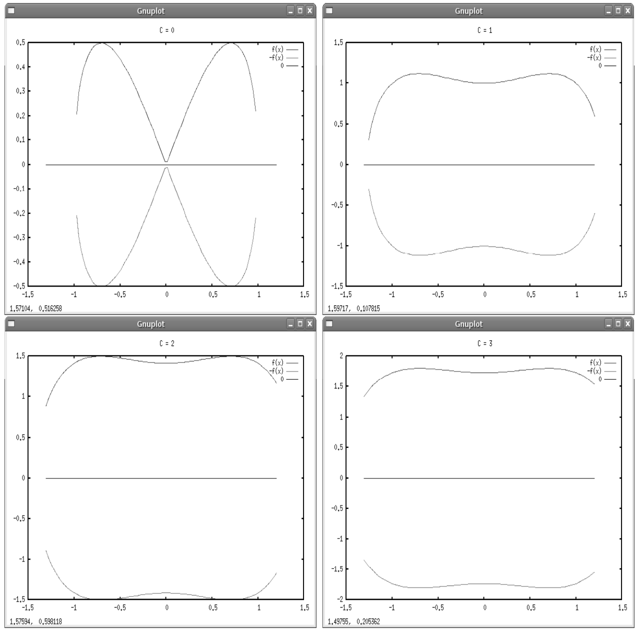

Figura 1: Curvas solução - órbitas

(b) (V)[ ](F)[ ]

$$xy' = ytg(ln(y)) \implies \frac{dy}{ytg(ln(y))} = \frac{dx}{x}$$

é uma equação a variáveis separáveis.

(c) (V)[ ](F)[ ] *Considere a equação*

$$xy' = y + xsin(x)$$

e os cálculos seguintes

$$xdy = ydx + xsin(x)dx \implies xdy - ydx = xsin(x)dx \implies \quad (8)$$

$$xdy - ydx = -y^2 d(\tfrac{x}{y}) \quad (9)$$

$$\text{fazendo } z = \tfrac{x}{y} \equiv y = \tfrac{x}{z} \text{ temos} \quad (10)$$

$$(\tfrac{x}{z})^2 dz = xsin(x)dx \implies \tfrac{dz}{z^2} = \tfrac{sin(x)}{x}dx \quad (11)$$

Como a última equação é a variáveis separáveis, *pode ser resolvida para encontrar-se $z = f(x)$ sendo a solução da equação original*

$$y = \frac{x}{f(x)}$$

(d) (V)[ ](F)[ ] $x + yy' = 0 \implies xdx = -ydy \implies x^2 + y^2 = C$ *e assim temos uma equação à variáveis separáveis.*

(e) (V)[ ](F)[ ] $(1 + xy)y' + y^3 = 0$ *não é a variáveis separáveis.*

(f) (V)[ ](F)[ ] $y' - ytg(x) = 0$; $y - xy' = 0$ *são equações a variáveis separáveis.*

(g) (V)[ ](F)[ ]

$$y' ln(\tfrac{y'}{4}) = 4x; \quad (12)$$

$$x = ln(y') + sin(y'); \quad (13)$$

$$y'^2 + e^{y'} = x; \quad (14)$$

não são à variáveis separáveis.

(h) (V)[ ](F)[ ] $y' = ey^2$ *é uma equação à variáveis separáveis.*

(i) (V)[ ](F)[ ] $(x^2 + y^2)dx - 3xydy = 0$ *é uma equação à variáveis separáveis.*

3. **logaritmo** *Esta questão ilustra um ponto importante, que a operação* "cálculo da primitiva" *não é inversa da operação* "cálculo da derivada", *embora muitas vezes pareça ser.*

(a) (V)[ ](F)[ ] *A derivada de* $f(x) = \frac{1}{x}$ *é* $f'(x) = ln|x|$ *se* $x \neq 0$

(b) (V)[ ](F)[ ] *A derivada de* $f(x) = ln|x|$ *é* $\frac{1}{x}$ *se* $x \neq 0$

(c) (V)[ ](F)[ ] *Uma primitiva de* $f(x) = ln(x)$ *é* $F(x) = e^x$

(d) (V)[ ](F)[ ] *Uma primitiva de* $f(x) = ln(x)$; $x > 0$ *é*

$$F(x) = e^x \; x \in \mathbf{R}$$

(e) (V)[ ](F)[ ] *A inversa de* $f(x) = ln(x)$; $x > 0$ *é* $F(x) = e^x \; x \in \mathbf{R}$

(f) (V)[ ](F)[ ] $F(x) = ln|x|$ *é uma primitiva da função* $f(x) = \frac{1}{x}$

(g) (V)[ ](F)[ ] *Se $a < x < 0$ então*

$$\int_a^x \frac{dt}{t} = -\int_x^a \frac{dt}{t} = \int_x^a \frac{dt}{|t|} = \tag{15}$$

$$= -\int_{-x}^{-a} \frac{dt}{t} = -\int_{|x|}^{|a|} \frac{dt}{t} = \int_{|a|}^{|x|} \frac{dt}{t} = \tag{16}$$

$$= ln|x| - ln|a| \tag{17}$$

$$a = -1 \implies \int_a^x \frac{dt}{t} = ln|x| \tag{18}$$

donde se pode concluir que $F(x) = ln|x|$ é primitiva de $f(x) = \frac{1}{x}$

(h) (V)[ ](F)[ ] *Se $a < x < 0$ então e considerando a sucessão de equações (15)-(17) se pode concluir que $F(x) = ln|x|$ é uma* primitiva local *de $f(x) = \frac{1}{x}$ restrita aos domínios $\mathbf{R}++$ ou (exclusivamente) $\mathbf{R}--$, isto é, a afirmação vale apenas em um dos domínios indicados. Em outras palavras, $f(x) = \frac{1}{x}$ é uma função localmente integrável em cada um dos domínios indicados acima, e não é integrável na reta inteira e nem siquer na reta excluindo-se o ponto zero.*

4. **Operador diferencial** *Uma expressão como*

$$\mathcal{D}(f) = af'' + bf' + cf \tag{19}$$

se chama de operador diferencial. *A palavra "*operador*" é usada para evitarmos de dizer "aplicando a função $\mathcal{D}$ na função f", ou ainda para caracterizar que estamos usando "funções definidas em espaços de funções".*

(a) (V)[ ](F)[ ] *Se $f(x) = sin(x)$; então $\mathcal{D}(f) = 0$*

(b) (V)[ ](F)[ ] *Se $f(x) = sin(x); a = 1; b = 0; c = 1$ então $\mathcal{D}(f) = 0$ e consequentemente $f(x) = sin(x)$ é uma solução da equação diferencial $\mathcal{D}(y) = 0$. $g(x) = cos(x)$ é outra solução desta equação.*

(c) (V)[ ](F)[ ] *$\mathcal{D}(y) = 0$ é uma equação diferencial de primeira ordem.*

(d) (V)[ ](F)[ ] *$\mathcal{D}(y) = 0$ é uma equação diferencial de segunda ordem.*

(e) (V)[ ](F)[ ] *Se $f(t) = e^{at}$ então podemos fatorar $\mathcal{D}(y) = P(a)e^{at}$*

(f) (V)[ ](F)[ ] *Se $f(t) = e^{at}$ então podemos fatorar $\mathcal{D}(y) = P(a)e^{at}$ e isto nos permite concluir que se $\underline{a}$ for uma raíz de P então $y = e^{at}$ é uma solução da equação diferencial*

$$\mathcal{D}(y) = 0$$

(g) (V)[ ](F)[ ] *Se $a = 1, b = 3, c = 2$ então e^{2x}, e^{x} são soluções de $\mathcal{D}(y) = 0$.*

5. **Operador diferencial** *Considere a expressão*

$$\mathcal{D}(y) = ay' + by \tag{20}$$

(a) (V)[ ](F)[ ] *$\mathcal{D}(y) = 0$ é uma equação diferencial de segunda ordem.*

(b) (V)[ ](F)[ ] *$\mathcal{D}(y) = 0$ é uma equação diferencial de primeira ordem com coeficientes variáveis.*

(c) (V)[ ](F)[ ] *$\mathcal{D}(y) = 0$ é uma equação diferencial de primeira ordem com coeficientes constantes.*

(d) (V)[ ](F)[ ] *$\mathcal{D}(y) = 0$ é uma equação diferencial de primeira ordem que pode ser escrita*

$$a\frac{dy}{y} = -bdx \implies \frac{dy}{y} = -\frac{b}{a}dx$$

sendo, portanto, a variáveis separáveis e tendo por solução

$$ln(y) = -\frac{b}{a}x \implies y = e^{-\frac{b}{a}x}$$

(e) (V)[ ](F)[ ] *$\mathcal{D}(y) = 0$ é uma equação diferencial de primeira ordem que pode ser escrita*

$$a\frac{dy}{y} = -bdx$$

donde se pode concluir que a

$$ln(y) = -bxln(y) = -\frac{b}{a}xy =$$

(f) (V)[ ](F)[ ] *Não tem sentido, para os operadores diferenciais que aparecem aqui, que o coeficiente de maior ordem de derivação seja nulo então podemos considerar sempre $a = 1$ (ou dividir por a) então a solução (considerando $a = 1$) da equação diferencial $\mathcal{D}(y) = 0$ é $y = e^{-bx}$*

(g) (V)[ ](F)[ ] *Sendo $a = 1$, se aplicarmos o operador diferencial $\mathcal{D}$ em $f(x) = e^{kx}$ podemos fatorar*

$$\mathcal{D}(f) = P(k)f(x) = P(k)e^{kx} = 0$$

e concluir que como "$-b$ é raíz de P" então $f(x) = e^{-bx}$ é uma solução da equação diferencial $\mathcal{D}(f) = 0$

6. *O polinômio P que aparece nas equações dos dois itens anteriores se chama "polinômio característico" e cria um método para resolver as equações chamadas lineares, resolva as equações diferenciais lineares abaixo.*

(a) $y' + 3y = 0$

(b) $y' - 3y = 0$

(c) $y'' - 5y' + 6y = 0$