Mét. num. e equ. diferenciais ordinárias **Lista 01**
Derivada, plano tangente, aprox. linear tarcisio@member.ams.org
T. Praciano-Pereira **Dep. de Matemática**

alun@:

Univ. Estadual Vale do Acaraú	12 de outubro de 2008
página da disciplina	http://www.edo-metodos.sobralmatematica.org
Documento escrito com LaTeX	sis. op. Debian/Gnu/Linux

Se você for entregar o seu trabalho pelo método medieval, por favor, prenda esta *folha de rosto* na solução da lista, preenchendo os seus dados.

As listas podem ser respondidas eletrônicamente, leia a informação sobre a entrega de arquivos.

Tudo que você escrever em papel estará perdido e provoca poluição, o que você escrever eletronicamente, poderá re-utilizar posteriormente em outro trabalho.

As questões são de múltipla escolha e serão consideradas corretas se você selecionar **todas** as alternativas certas e escrever uma justificativa bem elaborada para cada um dos itens corretos.

A parte discursiva das questões tem o objetivo de conduzí-l@ a se tornar um@ autor@ de textos de Matemática. Escreva livremente, é escrevendo que se aprende, (também lendo, é claro).

Aprenda a usar LaTeX , para escrever matemática.

Valor de cada questão: $\frac{1}{10}$, vou selecionar 10 questões para corrigir.

1 Assunto: Derivadas parciais, plano tangente

objetivo: Conduzir @ alun@ a dominar gradientes, jacobianas, derivação parcial e implícita, determinação das equações das variedades lineares tangentes, e mudanças de variáveis, campo vetorial, gráficos com apoio computacional.

Apresentar os primeiros exemplos de equações diferenciais ordinárias e suas soluções. Alertar para re-aquecer sua experiência com computação.

A lista está estruturada como um tutorial, cada questão contribui para uma compreensão da que vem depois.

A parte discursiva das questões tem o objetivo conduzí-l@ a ser um@ autor@ de textos matemáticos. Escreva livremente.

palavras chave: jacobiana, gradiente, derivadas parciais, variedades lineares tangentes, produto escalar, campo vetorial, equações diferenciais

1. Equação da reta e do plano

   (a) (V)[ ](F)[ ] A equação de uma reta que passa na origem, no plano $\mathbf{R}^2$, se expressa como o produto escalar de um vetor dado (A,B) por um vetor posição (x,y) arbitrário da reta:
   $$<(A,B),(x,y)>=0$$
   O símbolo $<,>$ representa o produto escalar.

   (b) (V)[ ](F)[ ]
   A equação de uma reta qualquer, no plano $\mathbf{R}^2$, se expressa como o produto escalar de um vetor dado (A,B) por um vetor posição (x,y) arbitrário da reta.
   $$<(A,B),(x,y)>=0$$

   (c) (V)[ ](F)[ ] No espaço $\mathbf{R}^3$ a equação de um plano que passa na origem, se expressa como o produto escalar de um vetor dado (A,B,C) por um vetor posição qualquer do plano.
   $$<(A,B,C),(x,y,z)>=0$$

   (d) (V)[ ](F)[ ] No espaço $\mathbf{R}^3$ a equação de um plano qualquer se expressa como o produto escalar de um vetor dado (A,B,C) por um vetor posição qualquer do plano.
   $$<(A,B,C),(x,y,z)>=0$$

   (e) (V)[ ](F)[ ]
   No espaço $\mathbf{R}^3$ a equação de um plano passando no ponto $P=(a,b,c)$ se expressa como o produto escalar de um vetor dado (A,B,C) pela diferença entre um vetor posição qualquer do plano com o vetor P:
   $$<(A,B,C),(x-a,y-b,z-c)>=0$$

2. Identifique as opções corretas:

	equação	vetor perpendicular	reta passa em
a)(V)[ ](F)[ ]	$Ax+By=0$	(B,A)	$(0,0)$
b)(V)[ ](F)[ ]	$Ax+By=0$	(A,B)	$(0,1)$
b)(V)[ ](F)[ ]	$Ax+By=A$	$(-A,-B)$	$(0,\frac{A}{B})$
d)(V)[ ](F)[ ]	$Ax+By=0$	$(-A,-B)$	$(0,1)$
e)(V)[ ](F)[ ]	$Ax+By=0$	$(-A,-B)$	$(0,0)$

3. Identifique o gráfico que corresponde à equação da reta r, $Ax+By=0$ e o vetor (A,B) na figura (1) página 2,

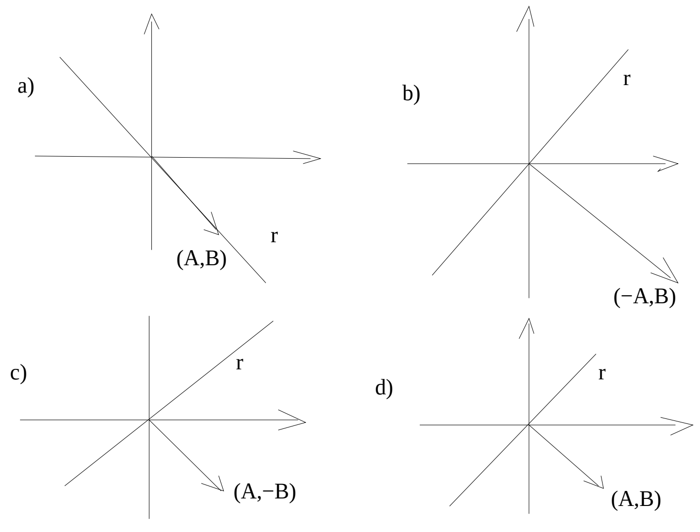

Figura 1: $Ax+By=0$

4. Se $Ax+By=C$ é a equação de uma reta $\underline{r}$ identifique quais das afirmações abaixo são corretas.

	equação	relação com r
a)(V)[ ](F)[ ]	$Ax + By = 0$	perpendicular
b)(V)[ ](F)[ ]	$Ax - By = 0$	paralela
c)(V)[ ](F)[ ]	$Ax + By = 10$	perpendicular
d)(V)[ ](F)[ ]	$Ax - By = 10$	paralela
e)(V)[ ](F)[ ]	$Ax + By = 0$	paralela
f)(V)[ ](F)[ ]	$Ax + By = -10$	paralela

5. Se $Ax + By = C$ é a equação da reta $\underline{r}$ identifique quais das afirmações abaixo são corretas.

	equação	relação com r
a)(V)[ ](F)[ ]	$y = Ax + B$	é uma equação equivalente
b)(V)[ ](F)[ ]	$By = -Ax$	é uma equação equivalente
c)(V)[ ](F)[ ]	$y = \frac{A}{B}x$	equação de uma reta paralela
d)(V)[ ](F)[ ]	$y = -\frac{A}{B}(x-a) + C$	equação de uma reta paralela
e)(V)[ ](F)[ ]	$y = m(x-a) + b; m = -\frac{A}{B}$	paralela
f)(V)[ ](F)[ ]	$y = m(x-a) + b; m = -\frac{A}{B}$	paralela passando por (a, b)
g)(V)[ ](F)[ ]	$y - b = m(x-a); m = -\frac{A}{B}$	paralela passando por (a, b)

6. Discursiva, (agilidade e experiência)

   Ganhe agilidade, escolha 100[1] vetores no plano e escreva duas equações de retas perpendiculares a estes vetores, uma passando pela origem, a outra passando por um ponto diferente da origem. Apresente o resultado numa tabela em que cada linha contenha: (1) equação, (2) vetor perpendicular, (3) ponto por onde passa a reta.

   A equação da reta deve estar na forma (que `gnuplot` entende):

$$y = f(x) = b + m(x - a) \tag{1}$$

   Método de correção: 5 itens escolhidos, ao caso, devem estar absolutamente corretos.

7. Apoio computacional

   Se $Ax + By + C = 0$ for a equação da reta $\underline{r}$ quais dos códigos abaixo produz o gráfico de $\underline{r}$ no terminal do `gnuplot`.

   Teste sua solução usando `gnuplot` com a equação no formato da equação (1).

   (a) (V)[ ](F)[ ]

```
A = 3; B = -5; C = 2; m = A/B; b = -C/B
f(x) = m*(x-a) + b
plot f(x)
```

   (b) (V)[ ](F)[ ]

```
A = 3.0; B = -5; C = 2; m = A/B; b = -C/B
f(x) = m*(x-a) + b
plot f(x)
```

   (c) (V)[ ](F)[ ]

```
A = 3; B = -5.0; C = 2; m = -A/B; b = -C/B
f(x) = m*(x-a) + b
plot f(x)
```

   (d) (V)[ ](F)[ ]

```
A = 3; B = -5.0; C = 2; m = -A/B; b =  -C/B
f(x) = m*x + b
plot f(x)
```

[1] ao sentir que já domina o assunto pode parar antes da centésima

8. Quando a reta não passar na origem

   Se uma reta não passar pela origem, ainda assim ela é paralela a uma outra reta que passa pela origem (supondo válido o 5ºpostulado...). Identifique quais das equivalências seguintes é verdadeira em que o símbolo $<, >$ representa o produto escalar.

   (a) (V)[ ](F)[ ] $< (A, B), (x, y) >= 0 \equiv Ax + By + C = 0$

   (b) (V)[ ](F)[ ] $< (A, -B), (x, y) >= -C \equiv Ax + By + C = 0$

   (c) (V)[ ](F)[ ] $< (-A, B), (x, y) >= -C \equiv Ax + By + C = 0$

   (d) (V)[ ](F)[ ] $< (A, B), (x, y) >= -C \equiv Ax + By + C = 0$

9. Equação do plano

   Quais das afirmações abaixo identifica um plano no espaço tridimensional em que A, B, C são três números dados e $P = (a, b, c)$ é um ponto do espaço.

   (a) (V)[ ](F)[ ] é o lugar geométrico dos pontos (x, y, z) do espaço $\mathbf{R}^3$ tal que

$$< (-A, -B, -C), (x, y, z) >= 0$$

   (b) (V)[ ](F)[ ] é o lugar geométrico dos pontos (x, y, z) do espaço $\mathbf{R}^3$ tal que

$$< (A, -B, C), (x - a, y - b, z - c) >= 0$$

   (c) (V)[ ](F)[ ] é o lugar geométrico dos pontos (x, y, z) do espaço $\mathbf{R}^3$ tal que

$$< (-A, B, -C), (x, y, z) >= 0$$

   (d) (V)[ ](F)[ ] é o lugar geométrico dos pontos (x, y, z) do espaço $\mathbf{R}^3$ tal que

$$< (A, B, C), (x, y, z) >= 0$$

10. Se $Ax + By + Cz + D = 0$ determine quais das afirmações abaixo estão corretas

   (a) (V)[ ](F)[ ] é o lugar geométrico dos pontos do (x, y, z) do $\mathbf{R}^3$ perpendiculares ao vetor (A, B, C).

   (b) (V)[ ](F)[ ] é a equação de um plano paralelo ao plano cuja equação é $Ax + By + Cz = 0$.

   (c) (V)[ ](F)[ ] é o lugar geométrico dos pontos do (x, y, z) do $\mathbf{R}^3$ perpendiculares ao vetor $(-A, -B, -C)$.

   (d) (V)[ ](F)[ ] é o lugar geométrico dos pontos do (x, y, z) do $\mathbf{R}^3$ paralelos ao vetor (A, B, C).

11. Escolha 100[2] vetores no espaço $\mathbf{R}^3$ e escreva as equações de planos perpendiculares a cada um deles, alguns dos quais você irá escolher de modo que não passe na origem.

   Método de correção:5 itens escolhidos, ao caso, devem estar absolutamente corretos.

   Apoio computacional

   Você pode obter gráficos de planos com `gnuplot`, o comando é

   `splot f(x,y)`

   em que a equação deve estar no formato

$$z = F(x, y) = C + Ax + By$$

   depois, com o ratinho, você pode rodar a imagem para procurar entender como ela é. Se você pedir o gráfico:

[2] O objetivo não é trabalho braçal, ao ter certeza de que sabe o que está fazendo, pode parar antes de chegar ao marco 100. A decisão é sua.

```
splot 0, F(x,y)
```
você terá o gráfico do plano XOY como referência. O comando
```
setarrow a,b,c rto d,e,f
```
desenha o segmento (vetor) com extremidades $(a,b,c),(d,e,f)$ que pode ajudar a visualisar a imagem. Por exemplo você pode, com o comando adequado, desenhar um vetor perpendicular ao plano.

12. Distância de um plano a origem

(a) (V)[ ](F)[ ] Se a equação
$$Ax + By + Cz + D = 0.$$
for multiplicada por $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ o termo independente nos dará a distância do plano à origem.

(b) (V)[ ](F)[ ] Na equação,
$$Ax + By + Cz + D = 0.$$
se o vetor $P = (A, B, C)$ for unitário, D é a distância do plano à origem.

(c) (V)[ ](F)[ ] Na equação,
$$Ax + By + Cz - D = 0.$$
se o vetor $P = (A, B, C)$ for unitário, D é a distância do plano à origem.

(d) (V)[ ](F)[ ] Na equação,
$$Ax + By + Cz - D = 0.$$
se o vetor $P = (A, B, C)$ for unitário, $\|D\|$ é a distância do plano à origem.

(e) (V)[ ](F)[ ] Na equação,
$$Ax - By + Cz - D = 0.$$
se o vetor $P = (A, B, C)$ for unitário, $\|D\|$ é a distância do plano à origem.

(f) (V)[ ](F)[ ] Se a equação
$$Ax + By + Cz + D = 0.$$
for multiplicada por $\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ o termo independente nos dará a distância do plano à origem. Neste caso não teria sentido falar em denominador zero.

13. Equação da reta no espaço - dim. maior do que 2

(a) (V)[ ](F)[ ] Cada uma destas equações representa uma reta no espaço $\mathbf{R}^2$
$$Ax + By + D = 0 \quad (2)$$
$$Ax + Bz + D = 0 \quad (3)$$
$$Ay + Bz + D = 0 \quad (4)$$

(b) (V)[ ](F)[ ] Os objetos representados pelas pelas equações (2) , (3) , (4) , no $\mathbf{R}3$ são todos de dimensão 2.

(c) (V)[ ](F)[ ] Os intens anteriores mostram que não podemos ter uma forma simples para a equação da reta em dimensão maior que 2. A saída para simplificar as equações de variedades de dimensão 1 no espaço de dimensão maior ou igual a 3 consiste em usar equações paramétricas.

(d) (V)[ ](F)[ ]
As equações paramétricas da reta paralela ao vetor $(1, -1, 3)$ que passa pelo ponto $(2, 2, 2)$ expressam que o vetor $(x - 2, y - 2, z - 2)$ é paralelo ao vetor $(1, -1, 3)$.

(e) (V)[ ](F)[ ]
As equações paramétricas da reta paralela ao vetor $(1, -1, 3)$ que passa pelo ponto $(2, 2, 2)$ expressam que o vetor $(x-2, y-2, z-2)$ é um múltiplo do vetor $(1, -1, 3)$.

(f) (V)[ ](F)[ ]
As equações paramétricas da reta paralela ao vetor (a, b, c) que passa pelo ponto (p, q, r) se deduzem da expressão
$$(x - p, y - q, z - r) = r(a, b, c)$$
em que $\underline{r}$ é um número real qualquer.

14. Escolha 100^3 vetores no espaço junto com 100 outras condições e escreva, em cada caso, as equações paramétricas das retas determinadas por estes 100 pares de condições.

Escolha algumas que passem em pontos escolhidos do espaço.

Método de correção: 5 itens escolhidos, ao caso, devem estar absolutamente corretos.

15. Curvas não retas - variedades de dimensão 1

Como as retas, a melhor forma para representar uma curva no espaço são as suas equações paramétricas. Se as equações não forem lineares, você terá uma curva - não reta. Usando **gnuplot** obtenha as imagens das curvas
$$(cos(t), sin(t), 1)\ ;\ t \in [-2\pi, 2\pi] \quad (5)$$
$$(cos(t), sin(t), t)\ ;\ t \in [-2\pi, 2\pi] \quad (6)$$
$$(t, 1 + 2t + t^2, t)\ ;\ t \in [-2\pi, 2\pi] \quad (7)$$

Método de correção: **todos** os gráficos devem estar corretos e, em cada caso, apresentados os comandos do gnuplot para obter os gráficos.

16. As equações
$$y_k = f_k(t)\ ;\ k \in \{1, 2, 3\}\ ;\ t \in [a, b] \quad (8)$$
em que f_k é uma função diferenciável para cada valor do índice k, são as equações paramétricas de uma curva no $\mathbf{R}^3$, parametrizadas no intervalo $[a, b]$.

(a) (V)[ ](F)[ ] O texto inicial da questão (caput) pode ser dito de outra maneira: "*é uma função vetorial, de variável real, definida no intervalo* $[a, b]$*, com valores no* $\mathbf{R}^3$".

(b) (V)[ ](F)[ ] Selecionado um valor $t_0 \in [a, b]$ a expressão
$$P_0 = (f_1(t_0), f_2(t_0), f_3(t_0)) \quad (9)$$
representa um ponto sobre a curva.

(c) (V)[ ](F)[ ] A expressão
$$T = (f_1'(t_0), f_2'(t_0), f_3'(t_0)) \quad (10)$$
representa um vetor que é paralelo à reta tangente ao gráfico de $f = (f_1, f_2, f_3)$ no ponto
$$P_0 = (f_1(t_0), f_2(t_0), f_3(t_0)) \quad (11)$$

(d) (V)[ ](F)[ ] Se P_0 e T forem os vetores definidos, respectivamente pelas equações (9), (10) então o vetor
$$P_0 + T$$
é tangente a curva no ponto P_0.

[3] depois que tiver certeza que entendeu pode para antes da centésima, mas não se engane.

17. Para cada uma das equações (5) , (6) , (7) encontre o vetor tangente nos pontos $f(t)$; $t \in \{-1, 1, 2\}$. Observe que o vetor derivada se encontram na origem (a derivada está sempre relacionada à origem), para obter um vetor tangente á curva é preciso trasladar a derivada para o ponto que corresponde ao vetor posição. Faça isto em todos os casos solicitados, e apresente o gráfico usando gnuplot.

    Método de correção: em todos os casos o vetor deve estar correto e ser apresentados os comandos do gnuplot para obter o gráfico.

18. sentido positivo é o anti-horário Encontre equações paramétricas do círculo trigonômetrico, e derivando mostre que o sentido natural de percurso é o anti-horário. Faça o gráfico com `gnuplot`

    Método de correção: todas as contas tem que estar corretas, equações paramétricas do círculo, derivadas, e ser apresentado a sucessão de comandos do `gnuplot` para mostrar o gráfico.

19. Derivada implícita

    (a) (V)[ ](F)[ ] A equação $z = f(x, y)$ em que f é uma função diferenciável, representa um objeto (o gráfico de f) de dimensão 2 no $\mathbf{R}^3$.

    (b) (V)[ ](F)[ ] A equação $w = f(x, y)$ em que f é uma função diferenciável, representa um objeto (o gráfico de f) de dimensão 3 no $\mathbf{R}^4$.

    (c) (V)[ ](F)[ ] A equação $\omega = f(x, y)$ em que f é uma função diferenciável, representa um objeto (o gráfico de f) de dimensão 4 no $\mathbf{R}^5$.

    (d) (V)[ ](F)[ ] Dada uma expressão diferenciável $F(x, y, z) = c$ em que c é uma constante, como o *Teorema da Função Implícita* nos permite (em certas condições) deduzir que $z = f(x, y)$ então a expressão $F(x, y, z) = c$ representa um objeto (o gráfico de f) de dimensão dois no $\mathbf{R}3$.

    (e) (V)[ ](F)[ ] Dada uma expressão diferenciável $F(x, y, z) = c$ em que c é uma constante, e se conhecermos uma solução (a, b, c) para a equação $F(x, y, z) = c$, então a expressão

    $$\frac{\partial F}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial F}{\partial y}(y-b) + \frac{\partial F}{\partial z}(z-c) = 0$$

    representa um plano (dimensão dois) tangente ao gráfico de $z = f(x, y)$ no ponto

    $$(a, b, c); c = f(a, b)$$

    (f) (V)[ ](F)[ ] Dada uma expressão diferenciável $F(x, y, z) = c$ em que c é uma constante, e se conhecermos uma solução (a, b, c) para a equação $F(x, y, z) = c$, e se pelo *Teorema da Função Implícita* pudermos expressar $z = f(x, y)$ numa vizinhança do ponto (a, b, c) então a expressão

    $$\frac{\partial F}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial F}{\partial y}(y-b) + \frac{\partial F}{\partial z}(z-c) = 0$$

    representa um plano (dimensão dois) tangente ao gráfico de $z = f(x, y)$ no ponto

    $$(a, b, c); c = f(a, b)$$

20. Encontre a equação do plano tangente ao gráfico da função

    $$z = f(x, y) = x^2 + 3xy + y^3 \qquad (12)$$

    no ponto $(2, 3, 49)$

    Método de correção todas as contas corretas. Qualquer erro anula a questão.

21. Escolha 100 funções, para cada uma delas calcule um ponto no gráfico e determine a equação do plano tangente em cada caso, mas pode parar antes da centésima se tiver certeza de que entendeu todo o processo.

    Método de correção: 5 itens escolhidos, ao caso, devem estar absolutamente corretos.