Equações Diferenciais Ordinárias **Lista 09**
Solução da equação de segunda ordem tarcisio@member.ams.org
T. Praciano-Pereira **Dep. de Matemática**

alun@:

Univ. Estadual Vale do Acaraú 9 de abril de 2008

Documento escrito com LaTeX - sis. op. Debian/Gnu/Linux

1 Informações

Por favor, se você usar o método medieval para entrega da lista, em papel, prenda esta *folha de rosto* na solução, deixando-a em branco. Ela será usada na correção. Se você quiser entregar o trabalho eletrônicamente, acesse a página da disciplina em

http://www.sobralmatematica.org

e procure o link "entrega de trabalhos". Por favor , siga as instruções sobre nomes de arquivos:

`edo_mat_seunome_XX.pdf`

de acordo com a sua matrícula na disciplina, `XX` é `09` para esta lista, e `pdf` é o tipo de formatação que você der ao seu trabalho. Data da entrega da lista: dia 22 de Abril terça-feira. Vou usar a aula do dia 15 de Abril para discução deste trabalho.

Se o trabalho for feito em equipe, *cada aluno deve entregar o seu porque a entrega do trabalho é o registro de sua freqüência*, quem **não entregar** o trabalho na data certa terá *falta* na semana.

2 Orientação

objetivo:

Apresentar os conceitos: *Wronskiano*, *variação dos parâmetros* e a solução da equação diferencial linear completa de segunda ordem.

As equações diferenciais de segunda ordem são consideradas o segundo tipo mais importante de equações diferenciais, quando se pensa em equações diferenciais ordinárias. As razões disto são

- Elas trazem um pouco mais de informação sobre os fenômenos que elas retratam ou modelam: a segunda derivada.
- Há uma grande quantidade de fenômenos descritos por equações de segunda ordem, observe que a segunda derivada descreve a *aceleração*, portanto a taxa de variação da velocidade e se encontra ligada à curvatura das curvas (dos percursos de objetos), os pêndulos (não esquecer que o clima é um "pêndulo" complicadíssimo, não pode ser tratado por uma equação diferencial ordinária, mas pode ser aproximado parcialmente por elas), por exemplo.

Não poderiamos terminar esta versão do nosso curso sem lhes repassar estes dois itens: *Wronskiano, variação dos parâmetros*

A *variação dos parâmetros* é uma forma de *fator integrante*, como você vai ver no desenvolvimento da última questão, nela estou lhes apresentando uma *conta* bastante complicada para que você escreva as justificativas da passagem de uma equação para outra. Ao final você verá que as *contas* conduzem à solução da equação diferencial linear de segunda ordem completa. Esta é uma forma alternativa de resolução de equações diferenciais lineares de segunda ordem (completas). Estas contas são complicadas porque elas foram descobertas experimentalmente pelos pioneiros em resolução de equações diferenciais, não posso precisar aqui como, mas *se faziam contas adoidado* e algumas delas se aproveitaram chegando até os nossos dias. As contas que não tiveram resultados aproveitáveis, embora tenham feito parte do processo de descoberta, desapareceram, são os erros que cometemos e apagamos.

Somente os *burocratas que vivem nas agências de fomento* é que podem imaginar que seja possível apresentarmos, de antemão, a metodologia que vamos usar para descobrir o conhecimento. A descoberta do conhecimento é feita por meios erráticos, passa por tentativas antes que possamos formular de forma adequada a solução descoberta. A última questão é um belo exemplo disto.

Estou inaugurando, neste lista, uma sistemática de *múltiplas escolhas* mas você não deve apenas escolher a opção correta, espero que você escreva uma pequena redação justificando a sua escolha. O método de *múltiplas escolhas* vem representar uma motivação para que analise algumas alternativas facilitando o seu raciocínio ao tentar ver entre as altenativas sugeridas qual é se aplica, mas se esforce para escrever um pouco de matemática ao justificar sua seleção.

palavras chave: variação dos parâmetros, equação diferencial linear de segunda ordem, Wronskiano, múltiplas escolhas.

3 Exercícios

Exercícios 1 (equações lineares de segunda ordem) *O método da variação dos parâmetros*

Objetivo: resolver a equação diferencial linear completa de segunda ordem.
variação dos parâmetros - equação de segunda ordem

As expressões

$$L(y) = y'' + py' + qy = g \tag{1}$$
$$L(y) = y'' + py' + qy = 0 \tag{2}$$

representam, na equação (1), o operador diferencial linear de segunda ordem, L definindo a equação diferencial linear de segunda ordem $L(y) = g$ em que g é uma função contínua definida em um intervalo da reta. Como em qualquer equação, a expressão que aparece no segundo membro, neste caso g, é um dado do problema, assimm como os coeficientes p, q. Na (2) temos a equação linear de segunda ordem, homogênea, associada. Vamos mostrar o método variação dos parâmetros e você deve justificar as passagens entre as equações, uma pequena redação, em cada item.

1. Suponha que conheçamos duas soluções y_1, y_2 da equação (2). Qual das alternativas seguintes se aplica relativamente a esta hipótese.

   (a) Uma equação diferencial sempre tem solução.

   (b) Uma equação homogênea sempre tem solução.

   (c) Uma equação linear homogênea sempre tem solução.

   (d) Uma equação linear homogênea sempre tem duas soluções.

2. Considerando a equação homogênea, (2), qual dos desenvolvimentos abaixo é o correto para transformá-la num sistema de equações de primeira ordem.

   (a)

$$y'' + py' + qy = 0; y'' = z; y' = w; y = \omega \tag{3}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} z & = y'' \\ w & = y' \\ pw + qy & = -y'' \end{array} \right. \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -q & -p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y' \\ y \\ -y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y' \\ y \\ -y \end{pmatrix} \tag{4}$$

   (b)

$$y'' + py' + qy = 0; y' = z \tag{5}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} z & = y' \\ pz + qy & = -z' \end{array} \right. \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' \tag{6}$$

3. Faça uma experiência, com `scilab` ou `octave` para testar cada alternativa e apresente os cálculos feitos como justificativa. Dada uma matriz A, somente é possível diagonalizar (ou triangularizar primeiro), mantendo-se a equivalência entre os sistemas de equação que ela representa, se

   (a) Com uma sucessão de operações-linha $S_1, S_2, \dots, S_n$, representadas por permutações da linhas da matriz identidade multiplicadas à direita pela matriz A. O resultado será:

$$T = A * S_1 * S_2 * \dots * S_n$$

   T é uma matriz triangular (pode ser diagonal).

   (b) Com uma sucessão de operações-coluna $S_1, S_2, \dots, S_n$, representadas por permutações da colunas da matriz identidade multiplicadas à esquerda pela matriz A. O resultado será:

$$T = S_n * \dots * S_2 * S_1 * A$$

   T é uma matriz triangular (pode ser diagonal).

   (c) Com uma sucessão de operações linha, representada pelos produtos da sucessão de matrizes $S_1, S_2, \dots, S_n$, cada uma delas sendo uma permutação das linhas da matriz identidade, multiplicadas à esquerda pela matriz A, cada uma delas equilibrada pelo produto da transposta da mesma matriz, multiplicada à direita pela matriz A operação coluna o que é feito multiplicando-se a matriz A por S_1 que representa a operação linha O resultado será:

$$T = S_n' * \dots * S_2' * S_1' * A * S_1 * S_2 * \dots * S_n = S' * A * S$$

   T é uma matriz triangular (pode ser diagonal).

4. Considere a combinação linear (com coeficientes funcionais) das funções y_1, y_2

$$f = v_1 y_1 + v_2 y_2 \tag{7}$$

   em que v_1, v_2 são duas funções conhecidas e y_1, y_2 são duas soluções linearmente independentes da equação (2), portanto também conhecidas.

   O método vai conduzí-l@ a uma fórmula para encontrar v_1, v_2 de modo que se consiga resolver a equação diferencial linear completa de segunda ordem. Lembre-se do fator integrante, o espirito da coisa é o mesmo, primeiro fazemos de contas que conhecmos tudo, e depois encontramos uma fórmula para resolver a equação (as vezes dá certo).

   Na sucessão de cálculos abaixo, foram calculadas as derivadas de primeira e segunda ordem de f e estabelecida uma condição sobre v_1, v_2 conduzindo a um sistema de equações de primeira ordem. Justifique cada uma das passagens. Quando chegar na hipótese não quebre a cabeça tentando uma justificativa imediata, siga em frente e depois volte para ver se compreendeu que ela é possível.

$$f = v_1 y_1 + v_2 y_2 \tag{8}$$
$$f' = v_1' y_1 + v_1 y_1' + v_2' y_2 + v_2 y_2' \tag{9}$$
$$f' = v_1' y_1 + v_2' y_2 + v_1 y_1' + v_2 y_2' \tag{10}$$
$$\textit{hipótese}\ v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \tag{11}$$
$$f'' = v_1' y_1' + v_2' y_2' + v_1 y_1'' + v_2 y_2'' \tag{12}$$
$$f'' = v_1 y_1'' + v_1' y_1' + v_2 y_2'' + v_2' y_2' \tag{13}$$
$$L(f) = f'' + pf' + qf = g \tag{14}$$
$$L(f) = v_1 y_1'' + v_1' y_1' + v_2 y_2'' + v_2' y_2' + \tag{15}$$
$$+p(v_1 y_1' + v_2 y_2') + q(v_1 y_1 + v_2 y_2) = \tag{16}$$
$$= v_1 L(y_1) + v_2 L(y_2) + v_1' y_1' + v_2' y_2' \tag{17}$$
$$L(f) = v_1' y_1' + v_2' y_2' = g \tag{18}$$
$$\begin{cases} v_1' y_1 + v_2' y_2 & = 0 \\ v_1' y_1' + v_2' y_2' & = g \end{cases} \tag{19}$$
$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} \tag{20}$$
$$v_1' = \frac{-g y_2}{W(y_1, y_2)}; v_2' = \frac{g y_1}{W(y_1, y_2)} \tag{21}$$

5. *Justifique A hipótese foi incorporada na equação (11) tornando, com este sistema de equações, possível determinar v_1, v_2. Use isto na sua justificativa da equação (11).*

6. *Justifique O determinante da matriz que aparece na equação (20) se chama* Wronskiano[1], *se duas funções, quaisquer, forem diferenciáveis e diferentes o* Wronskiano *delas é diferente de zero, ou, recíprocamente, se o* Wronskiano *for nulo, as funções coíncidem.*

[1] O nome é histórico, não é o objetivo justificar o nome, mas se quiser pode, recorra à Wikipedia, [13], e você vai encontrar como

Referências

[1] Arfken, G. *Mathematical Methods for Physicists*
Academic Press, INC. 1985

[2] Buck, R. C. and Buck E. F. *Advanced Calculus* McGraw-Hill - 1965

[3] Bo Thidé

A course in Electro Magnetism

http://www.plasma.uu.se/CED/Book

[4] Hirsch, e Smale S. *Linear Algebra, differential equations and dynamical systems* - Academic Press

[5] Praciano-Pereira, T. Cálculo numérico computacional
http://tarcisio.wordpress.com

[6] *Modern Mathematical Analysis*

Murray H. Protter & Charles B Morrey Jr

Reading - Addison-Wesley - 1964

[7] Simmons, G.F.
Differential Equations with App. and Hist. Notes.
M[BcGraw-Hill - Book Company - 1978

[8] *Biblioteca livre na Internet*

`http://www.wikipedia.org`

`http://pt.wikipedia.org/wiki/Série_de_Fourier`

[9] Rafael Iório Júnior e Valéria de Magalhães Iório *Equações Diferenciais Parciais: uma introduçÃo*
366 páginas
Publicação: IMPA, 1988
ISBN: 85-244-0035-8
Primeira Edição

[10] Zill, Dennis G. *Equações Diferenciais com aplicações em modelagem* Editora: THOMSON PIONEIRA ISBN-13: 9788522103140 - Preço = R$ 104,90

[11] Boyce, William E e Diprima, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno* Editora: LTC ISBN-13: 9788521614999 8a Edição - 2006 - 450 pág. Preço = R$ 126,00

[12] Claus I. Doering e Artur O. Lopes *Equações Diferenciais Ordinárias* Primeira Edição Coleção Matemática Universitária - IMPA

[13] *Wikipedia, a enciclopédia livre na Internet*

http://www.wikipedia.org