

1 Informações

Por favor, se você usar o método medieval para entrega desta lista, em papel, prenda esta *folha de rosto* na sua solução desta lista, deixando-a em branco. Ela será usada na correção, caso você a entregue pelo método medieval. Se você quiser entregar o trabalho eletronicamente, acesse a página da disciplina em

<http://www.sobralmatematica.org>
e procure o link “entrega de trabalhos”. Por favor, siga as instruções sobre nomes de arquivos:

`edo_mat_seunome.XX.pdf`

de acordo com a sua matrícula na disciplina, *XX* é 07 para esta para esta lista, e *pdf* é o tipo de formatação que você der ao seu trabalho.

Data da entrega da lista: dia 25 de Março, terça-feira. Se o trabalho for feito em equipe, *cada aluno deve entregar o seu porque a entrega do trabalho é o registro de sua frequência*, quem **não entregar** o trabalho na data certa terá *falta* na semana.

2 Orientação

Esta lista é um tutorial sobre polinômios trigonométricos e está baseada no programa `fourier.gnuplot` que você pode encontrar na página da disciplina, no link “programas”. É um programa para `gnuplot`:

- rode `gnuplot`
- execute no terminal do `gnuplot` `load 'fourier.gnuplot'`
- siga dando enter

objetivo: Objetivo é dar-lhe uma visão inicial sobre o significado dos polinômios trigonométricos que serão o objetivo da próxima lista de exercícios na obtenção de solução aproximada de equações diferenciais.

Os itens da lista de exercício estão sugerindo que você leia, rode e altere o programa com o objetivo de ver como ele funciona. Você pode e deve entrar em contacto com o professor para complementar as informações, assim como deve, depois de experimentar um pouco com o programa, e ver as coisas acontecendo, recorrer à [8, Wikipedia] procurando as palavras chave citadas abaixo, afim

de adquirir um pouco mais de informações e possivelmente rodar novamente o programa fazendo outras experiências.

palavras chave: coeficientes de Fourier, combinação linear de vetores, harmônicos, integral do cosseno, integral do seno, polinômio trigonométrico, produto escalar, séries trigonométricas.

3 Exercícios

Exercícios 1 *Polinômios trigonométricos*

1. *Baixe o programa `fourier.gnuplot` da página*

<http://www.edo-metodos.sobralmatematica.org/programas/>

é um tutorial feito para `gnuplot` para ilustrar a aproximação de uma função com polinômios trigonométricos.

- (a) *Rode `fourier.gnuplot`, dentro do `gnuplot` execute*
`load 'fourier.gnuplot'`
com aspas simples ou duplas (como você preferir). Depois siga dando enter e assista o filme! Infelizmente a trilha sonora ficou estragada!
- (b) *Leia o programa `fourier.gnuplot` e procure compreender como ele funciona, há comentários ajudando. Procure o comentário “altere aqui”, ele marca onde você deve alterar para experimentar com outra função. Há dois pontos marcados, um deles é simples informação para sair na tela, o outro é a equação que `gnuplot` irá ler. Verifique quem é quem, mas altere os dois quando quiser trocar a função. Respeite a sintaxe, do contrário haverá erro.*
- (c) *Os polinômios trigonométricos são combinações lineares dos vetores*

$$\cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \cos(3x), \sin(3x), \dots \quad (1)$$

que são chamados de harmônicos porque são os átomos das notas musicais (as notas musicais¹ são combinações lineares destas vibrações). Os coeficientes calculados por `fourier.gnuplot` devem aparecer na tela enquanto os gráficos vão aparecendo. Rode o programa para ver isto.

- (d) *Como são calculados os coeficientes de Fourier Os coeficientes dos polinômios trigonométricos são chamados também coeficientes de Fourier, procure [8, Fourier] para ler mais a respeito. Os coeficientes são*

$$a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots \quad (2)$$

e a combinação linear resultante será

$$a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + \dots \quad (3)$$

¹Isto foi descoberto por Euler e por algum dos irmãos Bernoulli no século 17.

e você deve procurar saber porque não tem b_0 (na verdade tem, mas é zero). Eles são as projeções da onda que se deseja decompor na direção dos harmônicos. Se calculam estas projeções com um produto escalar. A figura (1) página 3, relembra o que significam estas projeções no caso de um espaço de dimensão dois. As vibrações (as ondas sonoras, eletromagnéticas) são vetores de um espaço de dimensão não finita, no sentido de que precisamos de uma base de vetores com uma quantidade não finita para compor ou decompor estas ondas.

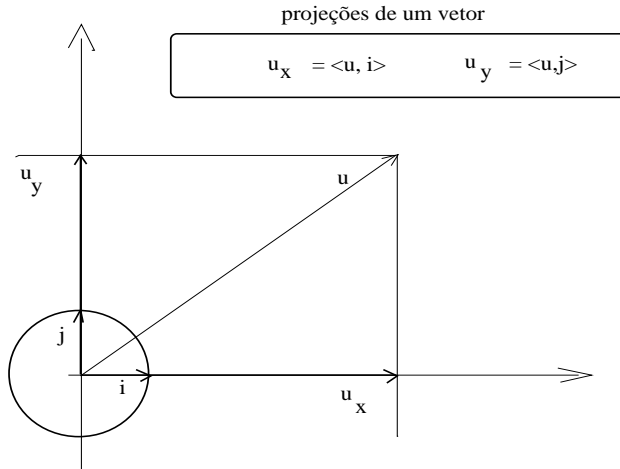


Figura 1: produto escalar e projeções de um vetor

Você encontra no início do programa `fourier.gnuplot` duas funções-`gnuplot` recursivas² para calcular integrais, `four1`, `four2`. Elas executam as seguintes expressões matemáticas:

$$\text{four1} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad (4)$$

$$\text{four2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \quad (5)$$

²funções recursivas, programas recursivos, são um pouco mais difíceis de se entender, mas eles são a única forma de conseguir fazer programas em `gnuplot`, esta é uma descoberta recente minha.

que são chamadas “integral do cosseno” e “integral do seno”, respectivamente. Leia as equações. Se $n = 0$ a integral `four2` vai dar zero, logo $b_0 = 0$.

- i. Rode o programa com a função $f(x) = x$ e note que os coeficientes de $\cos(nx)$ são praticamente zeros (deviam ser exatamente zeros). Por que? Por exemplo

$$a_{10} = 4.63269036273705e - 05 = 0.00000463269036273705 \quad (6)$$

A função $f(x) = x$ é uma função ímpar, o resultado teria que ser “ela é uma soma de harmônicos ímpares: $\sin(nx)$ ” então os coeficientes dos harmônicos $\cos(nx)$ devem ser zeros.

- ii. Rode o programa com a função $f(x) = x^2$ e note que os coeficientes de $\sin(nx)$ são praticamente zeros (deviam ser exatamente zeros). Por que? Por exemplo

$$b_{10} = 2.6728928622682e - 09 = 0.0000000026728928622682 \quad (7)$$

A função $f(x) = x^2$ é uma função par, o resultado teria que ser “ela é uma soma de harmônicos pares: $\cos(nx)$ ” então os coeficientes dos harmônicos $\sin(nx)$ devem ser zeros.

- iii. Outra característica dos coeficientes é que eles tendem a zero, quanto maior for o valor de n menor será a_n, b_n , altere³ o programa para que ele apenas imprima os coeficientes, e verifique isto. Procure encontrar uma explicação para isto, talvez lendo um pouco na [8].

³Não tema estragar o programa, se isto acontecer, pegue outra cópia na página, crie coragem e experimente a vontade.

Referências

- [1] Arfken, G. *Mathematical Methods for Physicists*
Academic Press, INC. 1985
- [2] Buck, R. C. and Buck E. F. *Advanced Calculus* McGraw-Hill - 1965
- [3] Bo Thidé
A course in Electro Magnetism
<http://www.plasma.uu.se/CED/Book>
- [4] Hirsch, e Smale S. *Linear Algebra, differential equations and dynamical systems* - Academic Press
- [5] Praciano-Pereira, T. Cálculo numérico computacional
<http://tarcisio.wordpress.com>
- [6] *Modern Mathematical Analysis*
Murray H. Protter & Charles B Morrey Jr
Reading - Addison-Wesley - 1964
- [7] Simmons, G.F.
Differential Equations with App. and Hist. Notes.
McGraw-Hill - Book Company - 1978
- [8] *Biblioteca livre na Internet*
<http://www.wikipedia.org>
http://pt.wikipedia.org/wiki/Série_de_Fourier
- [9] Rafael Iório Júnior e Valéria de Magalhães Iório *Equações Diferenciais Parciais: uma introdução*
366 páginas
Publicação: IMPA, 1988
ISBN: 85-244-0035-8
Primeira Edição
- [10] Zill, Dennis G. *Equações Diferenciais com aplicações em modelagem* Editora: THOMSON PIONEIRA ISBN-13: 9788522103140 - Preço = R\$ 104,90
- [11] Boyce, William E e DiPrima, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno* Editora: LTC ISBN-13: 9788521614999 8a Edição - 2006 - 450 pág. Preço = R\$ 126,00
- [12] Claus I. Doering e Artur O. Lopes *Equações Diferenciais Ordinárias* Primeira Edição Coleção Matemática Universitária - IMPA