Equações Diferenciais Ordinárias e Métodos — **Lista 06**
eq. dif. lineares — tarcisio@member.ams.org
T. Praciano-Pereira — **Dep. de Matemática**

alun@:

Univ. Estadual Vale do Acaraú — 4 de março de 2008

Documento escrito com LaTeX - sis. op. Debian/Gnu/Linux

Por favor, se você for usar o método medieval para entrega de trabalhos, em papel, prenda esta *folha de rosto* na sua solução desta lista, deixando-a em branco. Ela será usada na correção caso você entregue pelo método medieval. Se você quiser entregar o trabalho eletrônicamente, acesse a página da disciplina em

http://www.sobralmatematica.org

e procure o link "entrega de trabalhos". Por favor , siga as instruções sobre nomes de arquivos:

`disc_curso_seunome_XX.pdf`

em que disc_curso identifica seu curso e a disciplina que você faz comigo:

$$curso \in \{edo\_mat, edo\_eng\}$$

de acordo com a sua matrícula na disciplina, `XX` é `06` para esta lista, e `pdf` é o tipo de formatação que você der ao seu trabalho.

Data da entrega da lista: dia 11 de Março, terça-feira. Se o trabalho for feito em equipe, *cada aluno deve entregar o seu porque a entrega do trabalho é o registro de sua freqüência*, quem **não entregar** o trabalho na data certa terá *falta* na semana.

0.1 Orientação

Objetivo: Entender os operadores lineares que justificam a razão do nome (e da forma de resolver) as equações diferenciais lineares.

As equações diferenciais lineares são consideradas as mais importantes equações com que lidamos, em parte porque os fenômenos da natureza são "quase" lineares ou, quando não são lineares, tem uma componente linear que resolvida já dá uma parte da solução. Também temos a sensação de que o caminho para resolver as equações não lineares passa pela solução de uma linear que lhe é associada, as equações não lineares seriam "equações lineares perturbadas". Finalmente as equações lineares são as que a gente sabe resolver (quando sabe), e quando não soubermos, pelo menos podemos ter uma visão geral do que poderia ser a solução.

Quando você dominar o assunto, quer dizer, quando você souber que ainda tem muito para aprender, você poderá rir um pouco desta introdução, neste momento você será um especialista em equações diferenciais e terá um instrumento poderosíssimo nas mãos.

Umas das técnicas importantes no estudo destas equações consiste na representação matricial das mesmas, é neste momento que vale a afirmação feita acima, as matrizes (funcionais) nos dão uma visão de como poderia ser a solução das equações. Esta lista está voltada para construirmos a expressão matricial das equações lineares e resolvermos algumas.

palavras chave: equações diferenciais lineares, operadores (diferenciais) lineares.

0.2 Exercícios

Exercícios 1 *Equações diferenciais lineares*

1. *A curva de um cabo suspenso*

   (a) *Um cabo de aço é uniforme e cada metro dele pesa K quilos. Suponha que o cabo seja perfeitamente flexível (para que possa formar qualquer curva), determine a equação da curva que ele forma ao ser suspendido pelos extremos.*

   A figura (1) mostra o cabo resolvendo a questão da ponte (próximo item).

   A Física e a geometria da questão: Se o cabo não se romper é porque as forças envolvidas se encontram em equilíbrio, a soma delas é zero. Em qualquer ponto arbitrário da curva (x, y) a derivada é o coeficiente angular da tangente T, (detalhe na figura), e suas componentes são as tensões (forças) horizontal e vertical no cabo. A equação diferencial procurada deverá descrever a curvatura da curva desenhada pelo cabo, por exemplo, se o cabo tiver peso zero a curva desenhada seria seria uma reta. Definição de reta: é uma cuja curvatura em qualquer ponto é zero (é um círculo de raio ∞), a curvatura é o inverso do comprimento do raio. A curvatura é dada pela segunda derivada. Deduza uma equação diferencial de segunda ordem.

   (b) *Aplicação Queremos construir uma ponte sobre um rio e a forma ideal para uma ponte é um segmento de reta "horizontal", porque minimiza todos os esforços inclusive de manutenção. Deduza do item anterior o planejamento da ponte (não é necessário construir a ponte), apenas descreva o planejamento, por exemplo, interprete a figura (1) página 3. No real planejamento da ponte deve ser considerado o tráfego com um limite máximo tolerado e a questão fica mais complexa, descreva isto também apontando soluções de gerenciamento.*

   (c) *Classifique a equação diferencial resultante, não interessa resolvê-la agora.*

2. *Aplicação da catenária Na construção de redes telefônicas suspensas se utilizam dois cabos, um cabo ótico e um cabo de suspensão. Indique porque a catenária é importante mostrando de que forma vamos usar a equação diferencial dela resultante.*

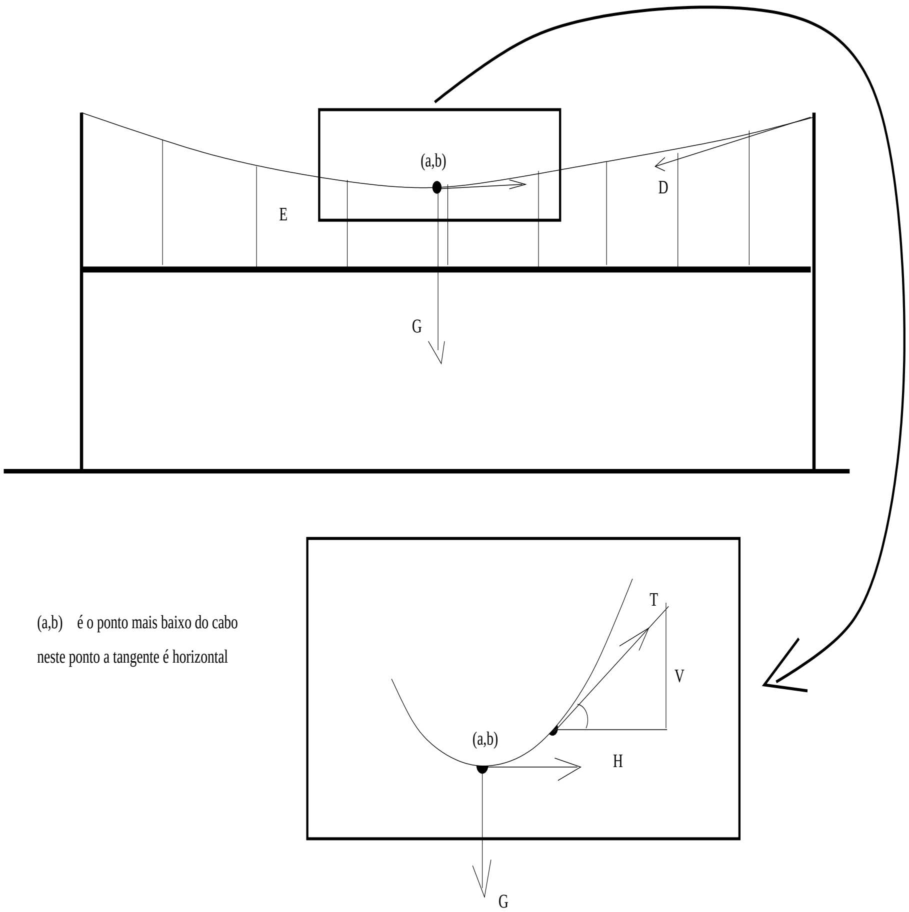

Figura 1: Catenária y é a curva solução que o cabo assume

3. *Operador diferencial*

   (a) *Considere a equação $y'' + py' + qy = 0$. Definindo o operador D como sendo a derivada, e I, como o operador identidade, esta equação pode ser escrita assim:*

$$D(D(y)) + pD(y) + qI(y) = 0 \tag{1}$$
$$D^2(y) + pD(y) + qI(y) = 0 \tag{2}$$
$$(P(D))y = 0 \tag{3}$$

   Justifique as passagens.

   (b) *O Polinômio P é o polinômio característico que aparece quando substuimos $y = e^{at}$ na equação diferencial. Verifique que $P(D)$ é um* *operador (diferencial) linear.*

(c) *Escreva o operador diferencial linear em cada uma das equações diferenciais :*

$$a)y' + 4y = 0 \qquad a)y'' + 3y' + y = 0$$

(d) *Escreva o operador diferencial linear em cada uma das equações*

$$a)y'' + x^2y'x^3y = 0 \qquad a)y'' + \frac{y}{x}y' - x^2y = 0$$

(e) *Classifique cada uma das equações no dois itens anteriores.*

4. *Transforme cada uma das equações diferenciais seguintes, num sistema de equações diferenciais de primeira ordem e escreva a expressão matricial do sistema.Não se pede que as equações sejam resolvidas. Classifique as equações.*

a) $y''' + 3y = 0$	*b)* $y'' + 2y' + 4y = 0$	*c)* $y'' - y' + y = 0$
d) $3y = y'' - y'$	*e)* $y''' - y = 0$	*f)* $y''' + y'' + y' = 0$
g) $y''' + y'' + y' + y = 0$	*h)* $y''' = 0$	*i)* $y'' + 3xy' + \frac{1}{x}y = 0$
j) $3xy'' + 3y' + 4y = 0$	*k)* $y'' - 3y' + 4xy = 0$	*l)* $\frac{1}{x}y''' + y' = 0$