

Documento escrito com L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X - sis. op. Debian/Gnu/Linux.

Por favor, prenda esta *folha de rosto* na sua solução desta lista, deixando-a em branco, caso você decida entregar o trabalho pelo método mediéval. Ela será usada na correção. A solução mais completa desta lista será publicada como solução oficial e o aut@r receberá 10 na primeira avaliação. Uma solução completa, necessariamente, deve conter gráficos, (vários) usando `gnuplot`, das soluções, e também deverá ser feita eletronicamente como condição para ser publicada.

## 1.1 Orientação

Leia rapidamente esta introdução e passe logo para os exercícios, depois de resolver alguns exercícios, volte a ler esta introdução que ela vai lhe parecer mais clara.

Uma equação da forma

$$y' + p(x)y = q(x)$$

se chama *equação diferencial linear de primeira ordem*. A razão do nome ainda vai ser discutida em outra lista de exercícios, mas aqui você já vai poder encontrar uma semelhança com os métodos da *Álgebra Linear*. Por exemplo, se a equação for incompleta,

$$y' + p(x)y = 0$$

ou como ainda chamamos, *homogênea*, duas coisas acontecem que lembram a *Álgebra Linear*:

- ela sempre tem solução, por exemplo, zero
- se tiver duas soluções  $y_1, y_2$  uma combinação linear destas soluções é também solução da equação (você já fez este exercício).

Para resolver a equação “completa”

$$y' + p(x)y = q(x)$$

usamos a técnica do fator integrante, a substituição  $y \mapsto z = \mu y$  transforma esta equação em

$$\underbrace{(\mu' y + p(x)\mu)}_0 y + \mu y' = q(x) \quad (1.1)$$

onde podemos identificar uma versão da equação homogênea na variável  $\mu$ : o que nos permite fazer uma hipótese

**Hipótese 1 hipótese factível** Suponha que na equação (eq. 1.1)  $\mu$  seja solução da equação linear homogênea:

$$\mu' y + p(x)\mu = 0$$

Um dos exercícios abaixo vai mostrar por que a hipótese é factível. Identifique o exercício na segunda leitura desta introdução.

Com a hipótese (factível) de  $\mu$  seja solução da equação homogênea associada, transforma a equação geral em “variáveis separáveis:

$$\begin{aligned} z' + p(x)z &= q(x) \equiv (\mu y)' + p(x)(\mu y) = q(x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mu' y + \mu y + p(x)\mu y = q(x) \equiv \\ &\equiv (\mu' + p(x)\mu)y + \mu y' = q(x) \equiv \\ &\Rightarrow \mu y' = q(x) \Rightarrow y' = \frac{q(x)}{\mu} \Rightarrow y = \int_{x_0}^x \frac{q(t)}{\mu} dt \Rightarrow z = \mu y \end{aligned}$$

Como  $\mu$  é uma solução da homogênea associada, por hipótese, (sempre existe), então

$$\begin{aligned} \mu' + p(x)\mu &= 0 \Rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = -p(x) \\ \ln(\mu) &= -P(x) \Rightarrow \mu = e^{-P(x)} \\ \mu &= e^{-P(x)} ; P(x) = \int_{x_0}^x p(t) dt \end{aligned}$$

Substituindo na última equação do bloco anterior temos:

$$\begin{aligned} z &= \mu y = \mu \int_{x_1}^x q(t) e^{P(t)} dt \\ y_{nh} &= z = \frac{1}{e^P} \int_{x_1}^x q(t) e^{P(t)} dt \end{aligned}$$

Sendo a última linha acima uma solução particular da equação completa.

A solução geral da equação diferencial linear de primeira ordem é:  $y = Cy_h + y_{nh}$  em que  $y_h$  representa uma solução da homogênea e  $y_{nh}$  representa uma solução da não homogênea:

$$y = \frac{C}{e^P} + \frac{1}{e^P} \int_{x_1}^x q(t) e^{P(t)} dt = \frac{1}{e^P} (C + \int_{x_1}^x q(t) e^{P(t)} dt) \equiv \frac{1}{e^P} \int_{x_1}^x q(t) e^{P(t)} dt$$

palavras chave: Fator integrante, equação diferencial linear, equação a variáveis separáveis.

## 1.2 Exercícios

**Exercícios 1** Solução da equação de primeira ordem

1. Equação linear homogênea

(a) Verifique que uma equação da forma  $y' + p(x)y = 0$  é a variáveis separáveis. Encontre a solução geral desta equação.

(b) Resolva as equações abaixo e faça o gráfico de alguma soluções com `gnuplot`

a) $(1+x^2)y' + 2xy = 0$	b) $\frac{dy}{dx} = xy$	c) $\frac{dx}{dt} = 3x$
d) $\frac{dx}{dt} = -3x$	e) $\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t}$	f) $y' = \frac{y}{x}$
g) $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$	h) $y' = -\frac{y}{x}$	i) $y' + \sin(x)y = 0$

2. Nas equações seguintes, substitua  $y \mapsto z = \mu y$  e desenvolva a expressão:

a) $y' + p(x)y = q(x)$	b) $y'' + a(x)y' + b(x)y = d(x)$	c) $a(x)y' + b(x)y = c(x)$
------------------------	----------------------------------	----------------------------

3. Verifique, por substituição, que a combinação linear

$$z = Ce^{-P(x)} + e^{-P(x)} \int q(x)e^{P(x)} dx$$

é solução da equação diferencial linear completa de primeira ordem

$$y' + p(x)y = q(x)$$

4. a equação completa de primeira ordem

(a) Na equação  $y' + p(x)y = q(x)$  substitua  $y \mapsto z = \mu y$  e verifique que a hipótese “ $\mu$  é solução da equação linear homogênea de primeira ordem” torna a equação em variáveis separáveis.

(b) Se convença de que a hipótese é **factível** com um argumento da *Álgebra Linear sobre equações homogêneas*. Encontre uma solução particular (mostrando que a hipótese é válida) da equação homogênea

$$\mu' + p(x)\mu = 0$$

(c) Aplique a hipótese enunciada acima sobre  $\mu$  e resolva a equação resultante<sup>1</sup>.

5. Qualquer solução da equação homogênea tomada como hipótese é uma solução e portanto um fator integrante. Considere o mais simples, quando a constante for 1, e verifique que

$$\mu y = \mu \int \frac{q(x)}{\mu} dx$$

<sup>1</sup>o fator  $\mu$  obtido de acordo com a hipótese feita na questão anterior, se chama *fator integrante*.

resolva a equação

$$y' + p(x)y = q(x)$$

assim como qualquer múltiplo de  $\mu y$  por uma constante arbitrária não nula.

6. Resolva as equações seguintes, diretamente, sem uso da fórmula:

$$a) y' + x^2 y = x^3 \quad a) y' + \frac{y}{x} = x^2.$$

indicando o domínio de validade da solução.

7. Teste a correção das soluções encontradas na questão anterior usando a fórmula.