Equações diferenciais ordinárias **Lista 05 - 2da. edição**
assunto: equações lineares tarcisio@member.ams.org
T. Praciano-Pereira **Dep. de Matemática**

alun@:

Univ. Estadual Vale do Acaraú 27 de fevereiro de 2008

Documento escrito com LaTeX - sis. op. Debian/Gnu/Linux.

Por favor, prenda esta *folha de rosto* na sua solução desta lista, deixando-a em branco, caso você decida entregar o trabalho pelo método mediéval. Ela será usada na correção. A solução mais completa desta lista será publicada como solução oficial e o aut@r receberá 10 na primeira avaliação. Uma solução completa, necessariamente, deve conter gráficos, (vários) usando `gnuplot`, das soluções, e também deverá ser feita eletronicamente como condição para ser publicada.

1.1 Orientaçao

Leia rapidamente esta introduçao e passe logo para os exercícios, depois de resolver alguns exercícios, volte a ler esta introdução que ela vai lhe parecer mais clara.

Uma equação da forma

$$y' + p(x)y = q(x)$$

se chama *equação diferencial linear de primeira ordem. A razão do nome ainda vai ser discutida em outra lista de exercícios, mas aqui você já vai poder encontrar uma semelhança com os métodos da Álgebra Linear. Por exemplo, se a equação for incompleta,*

$$y' + p(x)y = 0$$

ou como ainda chamamos, homogênea, duas coisas acontecem que lembram a Álgebra Linear:

- *ela sempre tem solução, por exemplo, zero*
- *se tiver duas soluções* y_1, y_2 *uma combinação linear destas soluções é também solução da equação (você já fez este exercício).*

Para resolver a equação "completa"

$$y' + p(x)y = q(x)$$

usamos a técnica do fator integrante, a substituição $y \mapsto z = \mu y$ *transforma esta equação em*

$$\underbrace{(\mu' y + p(x)\mu)}_{0} y + \mu y' = q(x) \tag{1.1}$$

onde podemos identificar uma versão da equação homogênea *na variável* μ*: o que nos permite fazer uma hipótese*

Hipótese 1 *hipótese factível Suponha que na equação (eq. 1.1) μ seja solução da equação linear homogênea:*

$$\mu' y + p(x)\mu) = 0$$

Um dos exercícios abaixo vai mostrar por que a hipótese é factível. *Identifique o exercício na segunda leitura desta introdução.*

Com a hipótese (factível) de μ seja solução da equação homogênea associada, transforma a equação geral em "variáveis separáveis:

$$\begin{gathered} z' + p(x)z = q(x) \equiv (\mu y)' + p(x)(\mu y) = q(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu' y + \mu y + p(x)\mu y = q(x) \equiv \\ \equiv (\mu' + p(x)\mu)y + \mu y' = q(x) \equiv \\ \Rightarrow \mu y' = q(x) \Rightarrow y' = \frac{q(x)}{\mu} \Rightarrow y = \int_{x_0}^{x} \frac{q(t)}{\mu} dt \Rightarrow z = \mu y \end{gathered}$$

Como μ é uma solução da homogênea associada, por hipótese, (sempre existe), então

$$\begin{aligned} &\mu' + p(x)\mu = 0 \Rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = -p(x) \\ &ln(\mu) = -P(x) \Rightarrow \mu = e^{-P(x)} \\ &\mu = e^{-P(x)} \ ; \ P(x) = \int_{x_0}^{x} p(t)dt \end{aligned}$$

Substituindo na última equação do bloco anterior temos:

$$\begin{gathered} z = \mu y = \mu \int_{x_1}^{x} q(t)e^{P(t)}dt \\ y_{nh} = z = \frac{1}{e^P} \int_{x_1}^{x} q(t)e^{P(t)}dt \end{gathered}$$

Sendo a última linha acima uma solução particular da equação completa.

A solução geral da equação diferencial linear de primeira ordem é: $y = Cy_h + y_{nh}$ em que y_h representa uma solução da homogênea e y_{nh} representa uma solução da não homogênea:

$$y = \frac{C}{e^P} + \frac{1}{e^P} \int_{x_1}^{x} q(t)e^{P(t)}dt = \frac{1}{e^P}(C + \int_{x_1}^{x} q(t)e^{P(t)}dt) \equiv \frac{1}{e^P} \int_{x_1}^{x} q(t)e^{P(t)}dt$$

palavras chave: Fator integrante, equação diferencial linear, equação a variáveis separaveis.

1.2 Exercícios

Exercícios 1 *Solução da equação de primeira ordem*

1. *Equação linear homogênea*

   (a) *Verifique que uma equação da forma $y' + p(x)y = 0$ é a variáveis separáveis. Encontre a solução geral desta equação.*

   (b) *Resolva as equações abaixo e faça o gráfico de alguma soluções com* `gnuplot`

a) $(1 + x^2)y' + 2xy = 0$	b) $\frac{dy}{dx} = xy$	c) $\frac{dx}{dt} = 3x$
d) $\frac{dx}{dt} = -3x$	e) $\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t}$	f) $y' = \frac{y}{x}$
g) $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$	h) $y' = -\frac{y}{x}$	i) $y' + sen(x)y = 0$

2. *Nas equações seguintes, substitua $y \mapsto z = \mu u$ e desenvolva a expressão:*

a) $y' + p(x)y = q(x)$	b) $y'' + a(x)y' + b(x)y = d(x)$	c) $a(x)y' + b(x)y = c(x)$

3. *Verifique, por substituição, que a combinação linear*

$$z = Ce^{-P(x)} + e^{-P(x)} \int q(x)e^{P(x)}dx$$

   é solução da equação diferencial linear completa de primeira ordem

$$y' + p(x)y = q(x)$$

4. *a equação completa de primeira ordem*

   (a) *Na equação $y' + p(x)y = q(x)$ substitua $y \mapsto z = \mu y$ e verifique que a hipótese "μ* é solução da equação linear homogênea de primeira ordem*" torna a equação em* variáveis separáveis.

   (b) *Se convença de que a hipótese é* **factível** *com um argumento da Álgebra Linear sobre equações homogêneas. Encontre uma solução particular (mostrando que a hipótese é válida) da equação homogênea*

$$\mu' + p(x)\mu = 0$$

   (c) *Aplique a hipótese enunciada acima sobre μ e resolva a equação resultante*[1]*.*

5. *Qualquer solução da equação homogênea tomada como hipótese é uma solução e portanto um fator integrante. Considere o mais simples, quando a constante for 1, e verifique que*

$$\mu y = \mu \int \frac{q(x)}{\mu} dx$$

[1] o fator μ obtido de acordo com a hipótese feita na questão anterior, se chama *fator integrante.*

resolve a equação

$$y' + p(x)y = q(x)$$

assim como qualquer múltiplo de μy por uma constante arbitrária não nula.

6. *Resolva as equações seguintes, diretamente, sem uso da fórmula:*

$$a)y' + x^2 y = x^3 \qquad a)y' + \frac{y}{x} = x^2.$$

indicando o domínio de validade da solução.

7. *Teste a correção das soluções encontradas na questão anterior usando a fórmula.*