

0.1 Tutorial sobre Polinômio de Taylor

objetivo: Usar Polinômios de Taylor associados com equações diferenciais ordinárias. O objetivo nesta disciplina é solução de equações diferenciais *aproximadamente* associando-as *sempre* com suas aplicações. Os polinômios de Taylor são uma representação aproximada de funções e aqui uma *representação aproximada* de soluções de equações diferenciais. *Inicialmente* vamos aprender a ferramenta, *depois* vamos usá-la.

palavras chave: Polinômio de Taylor, equações diferenciais ordinárias, série de potências.

A série de Taylor é um caso particular de *série de potência*.

Definição 1 *Série de potência*

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (1)$$

expandida na origem, ou, de forma mais geral,

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - a)^k \quad (2)$$

a *série expandida no ponto $x = a$* .

Nas séries de Taylor,

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

Em geral usamos os polinômios de Taylor: um elemento da série, ou o termo de ordem n da série de Taylor:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad (3)$$

expandido na origem, ou, de forma mais geral,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - a)^k \quad (4)$$

o polinômio de Taylor expandido no ponto $x = a$.

Observe que

$$S(x) = \lim_n P_n(x) \quad (5)$$

A equação da reta tangente é um primeiro exemplo de polinômio de Taylor, do primeiro grau. Depois vem a parábola tangente, um polinômio do terceiro grau tangente, ...

0.2 Exercícios

- teoria** Reta tangente ao gráfico de uma função Fórmula de Taylor. A derivada de uma função nos fornece o coeficiente angular instantâneo da mesma no ponto:

$f'(a)$ é o coeficiente angular instantâneo de f em $(a, f(a))$

- teórica** Fórmula de Taylor - equação da reta Escreva a equação da reta que passa no $(a, f(a))$ e é tangente ao gráfico da função neste ponto. Observe que você deseja a equação da reta que passa no ponto $(a, f(a))$, com coeficiente angular $f'(a)$. Faça um gráfico genérico mostrando o que acontece.
- Escreva a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto a em cada caso abaixo e faça o gráfico com **gnuplot**

$f(x) =$	a	$f(x) =$	a
a) $\text{sen}(x)$	$a = 0$	b) $\frac{1}{1+x^2}$	$a = 0$
c) $\cos(x)$	$a = 0$	d) $\frac{\text{sen}(x)}{1+x^2}$	$a = 0$
e) $\text{sen}(x+3)(x+2)$	$a = 1$	f) $\frac{x \text{sen}(x)}{1+x^2}$	$a = -1$

- Teórica - polinômio do segundo grau tangente** Expanda as equações (5), (4) para encontrar as equações de uma parábola (polinômio do segundo grau) tangente ao gráfico de f *memorizando* também a curvatura (segunda derivada)

$$y = A + B(x - a) + C(x - a)^2 \quad (6)$$

Um polinômio desenvolvido¹ no ponto $x = a$.

- Escreva a equação da parábola tangente ao gráfico de f em cada caso indicado abaixo, e faça o gráfico com **gnuplot**.

$f(x) =$	a	$f(x) =$	a
a) $\text{sen}(x)$	$a = 0$	b) $\frac{1}{1+x^2}$	$a = 0$
c) $\cos(x)$	$a = 0$	d) $\frac{\text{sen}(x)}{1+x^2}$	$a = 0$
e) $\text{sen}(x+3)(x+2)$	$a = 1$	f) $\frac{x \text{sen}(x)}{1+x^2}$	$a = -1$

¹novamente, um polinômio desenvolvido no ponto $x = a$

Se usarmos apenas os coeficientes para representar um polinômio, podemos dizer

$$(a_i)_{i=0}^n (b_j)_{j=0}^m = \left(\sum_{i+j} a_i b_j \right)_{i+j=0}^{i+j=n+m} \quad (13)$$

$$(a_i)_{i=0}^n (b_j)_{j=0}^m = \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right)_{k=0}^{k=n+m} \quad (14)$$

$$\sum_{i+j=0} (a_i b_j), \sum_{i+j=1} (a_i b_j), \dots, \sum_{i+j=n+m} (a_i b_j) \quad (15)$$

Podemos agora escrever o produto $f(x)g(x)$. Nesta expressão está presente a variável, ela aparecerá com expoentes distintos que servem para marcar a posição. O expoente é a variável

$$k = i + j$$

que aparece nas expressões acima:

$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{n+m} \sum_{i+j=k} a_i b_j x^k$$

que corresponde na equação (15) colocar uma soma entre os termos incluindo em cada termo a variável com potência k .

9. Equação diferencial e polinômio de Taylor

(a) Considere um polinômio de Taylor de grau n

$$P(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \dots + a_n(x-a)^n$$

tangente ao gráfico de f , solução da equação diferencial

$$f'' + f' + f = 0; \quad f(a) = 1; \quad f'(a) = -\frac{1}{2} \quad (16)$$

encontre as condições sobre os coeficientes a_k que esta equação diferencial induz.

sugestão: Escreva a matriz de P e sua derivadas, some apenas os coeficientes e aplique a condição representada pela equação diferencial.

Solução 2 Esta equação tem um solução exata que nós já sabemos calcular, basta fazer a suposição que $y = e^{at}$ é uma solução e substituir na equação para encontrar os valores de a que tornam a exponencial uma solução:

$$y + y' + y'' = e^{at} + ae^{at} + a^2 e^{at} = e^{at}(1 + a + a^2) = 0 \Rightarrow 1 + a + a^2 = 0$$

Resolvendo a equação temos $a = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e portanto as soluções exatas da equação diferencial são

$$y_1(x) = e^{-\frac{x}{2}} e^{i\frac{\sqrt{3}x}{2}} \quad (17)$$

$$y_1(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \right) \quad (18)$$

$$y_2(x) = e^{-\frac{x}{2}} e^{-i\frac{\sqrt{3}x}{2}} \quad (19)$$

$$y_2(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \right) \quad (20)$$

Aqui vamos lembrar uma observação que fizemos quando rapidamente estudamos as equações deste tipo, que chamamos de lineares, porque elas tem propriedades que vem da Álgebra Linear como ainda veremos mais a frente. Vimos que se encontrássemos duas soluções de uma equação diferencial linear, então, qualquer combinação linear delas também era uma solução, em particular a soma delas é uma solução. Se somarmos $y_1 + y_2$ o resultado é

$$y = 2e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \quad (21)$$

porque elas são conjugadas. Poderíamos ter usado $\frac{1}{2}$ em vez de 1 como coeficientes da combinação linear para concluir que

$$y = e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \quad (22)$$

$$y' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{x}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \quad (23)$$

$$\text{considerando } a = 0, y(a) = 1, y'(a) = -\frac{1}{2} \quad (24)$$

e encontramos assim uma solução exata, real, para equação diferencial.

Observe que isto sempre é possível, porque um polinômio a coeficientes reais com raízes complexas tem raízes complexas conjugadas o que resulta, como acima, em soluções reais para a equação diferencial como precisamos.

Vamos agora procurar uma solução aproximada usando Polinômio de Taylor.

A idéia consiste supor que um polinômio de um certo grau seja a solução aproximada da equação e impor a este polinômio as condições da equação para encontrar uma sistema de equações sobre os coeficientes do polinômio.

A aproximação (precisão) vai se dar em função da escolha que fizermos do grau do polinômio, se usarmos uma série de Taylor teríamos uma solução exata, mas nem sempre se consegue expressar uma série de Taylor de forma conveniente, mas se conseguirmos o vamos fazer a partir da expressão de polinômios de Taylor e uma condição de indução que consigamos descobrir.

Vamos começar com a aproximação usando polinômio de Taylor de grau 7

$$P(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + a_4(x-a)^4 + a_4(x-a)^4 + \dots + a_4(x-a)^7 \quad (25)$$

escolhendo o ponto $a = 0$ onde vamos desenvolver o polinômio, seria exatamente o ponto com o qual se expressam as condições iniciais que no presente caso está em forma algébrica. Vamos o ponto em que encontramos uma solução exata para que possamos obter um gráfico comparativo com `gnuplot`.

Vamos agora expressar a matriz das derivadas de P

$$P(0) = 1 \quad (26)$$

$$P'(0) = -\frac{1}{2} \quad (27)$$

$$P(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \quad (28)$$

$$+ a_4(x-a)^4 + a_4(x-a)^4 + \dots \quad (29)$$

$$P'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + 4a_4(x-a)^3 + \quad (30)$$

$$+ 5a_5(x-a)^4 + 6a_6(x-a)^5 + \dots \quad (31)$$

$$P''(x) = 2a_2 + 6a_3(x-a) + 12a_4(x-a)^2 + 20a_5(x-a)^3 + \quad (32)$$

$$+ 30a_6(x-a)^4 + 42a_7(x-a)^5 \quad (33)$$

$$P(x) + P'(x) + P''(x) = 0 \quad (34)$$

$$a_0 + a_1 + 2a_2 + (a_1 + 2a_2 + 6a_3)(x-a) + (a_2 + 3a_3 + 12a_4)(x-a)^2 + \quad (35)$$

$$+ (a_3 + 4a_4 + 20a_5)(x-a)^3 + (a_4 + 5a_5 + 30a_6)(x-a)^4 + \quad (36)$$

$$+ (a_5 + 6a_6 + 42a_7)(x-a)^5 \equiv 0 \quad (37)$$

e vamos agora impor as condições iniciais, equação (25), nas expressões das equações (34) e (37). Porque elas representam a soma $P + P' + P''$ que é a solução aproximada que estamos procurando:

Isto nos dá o sistema de equações

$$\begin{cases} a_0 & = 1 \\ a_1 & = -\frac{1}{2} \\ a_0 + a_1 + 2a_2 & = 0 \\ a_1 + 2a_2 + 6a_3 & = 0 \\ a_2 + 3a_3 + 12a_4 & = 0 \\ a_3 + 4a_4 + 20a_5 & = 0 \\ a_4 + 5a_5 + 30a_6 & = 0 \\ a_5 + 6a_6 + 42a_7 & = 0 \end{cases} \quad (38)$$

Resolvendo o sistema de equações, temos:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = -\frac{1}{2} \\ a_2 = -\frac{1}{4} \\ a_3 = -\frac{1}{6} \\ a_4 = \frac{1}{18} \\ a_5 = -\frac{1}{20 \cdot 18} \\ a_6 = \frac{1}{20 \cdot 18 \cdot 30} \\ a_7 = \frac{1}{42 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 30} \end{cases} \quad (39)$$

$$P(x) = 1 - (1/2.0) * x - (1/4.0)x^2 - (1/6.0) * x^3 + (1/18.0) * x^4 + \quad (40)$$

$$+ (1/(20 * 18.0)) * x^5 + (15/(20 * 18 * 30.0)) * x^6 + (1/(42 * 120.0)) * x^7 \quad (41)$$

Os comandos para o gnuplot são

```
P(x) = 1 - (1/2.0)*x - (1/4.0)*x**2 - (1/6.0)*x**3 + (1/18.0)*x**4 \
+ (1/(20*18.0))*x**5 + (15/(20*18*30.0))*x**6 + (1/(42*120.0))*x**7
f(x) = exp(-0.5*x)*cos( 0.5*sqrt(3)*x)
set terminal postscript enhanced color portrait
set output 'exer02_01_01.eps'
```

Veja na figura (1) página 7,

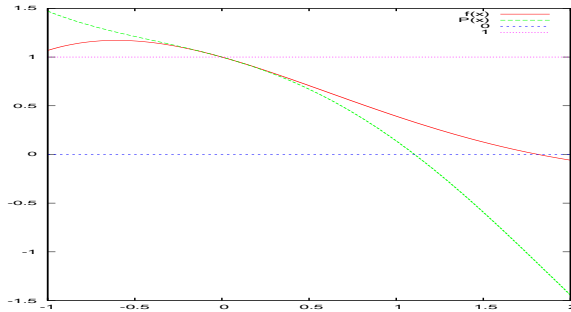


Figura 1: Solução aproximada com Polinômio de Taylor

(b) Na equação diferencial anterior, verifique que se tivermos as condições iniciais

$$f(a) = 1 ; f'(a) = -\frac{1}{2} \quad (42)$$

podemos encontrar uma solução única (aproximada) para equação diferencial (16). Faça o gráfico desta solução aproximada usando **gnuplot**.

10. Equação diferencial e polinômio de Taylor

Considere um polinômio de Taylor do terceiro grau

$$P(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + a_3(x - a)^3 \dots$$

tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ f que seja uma solução da equação diferencial (o polinômio é uma aproximação da solução)

$$ff' = 0 ; f'(a) = 1 \quad (43)$$

encontre as condições sobre os coeficientes a_k que a equação diferencial (43) induz, calcule os coeficientes e faça o gráfico de P usando **gnuplot**.

Sugestão: multiplique os polinômios usando apenas a matriz dos coeficientes e aplique a condição representada pela equação diferencial.

Solução 3 Já fizemos na solução (1) o produto de polinômios e usando o método ali desenvolvido, teremos todas as somas em que a soma dos índices for constante, podemos escrever (vou escrever "ff'" para sugerir o uso apenas dos coeficientes do polinômio).

$$ff' \approx (a_0, a_1, \dots, a_5)(a_1, 2a_2, \dots, 5a_5) = \quad (44)$$

$$= (a_0a_1, 2a_0a_2 + a_1a_1, 3a_0a_3 + 2a_1a_2 + a_2a_1, \quad (45)$$

$$4a_0a_4 + 3a_1a_3 + 2a_2a_2 + a_3a_1, \quad (46)$$

$$5a_0a_5 + 4a_1a_4 + 3a_2a_3 + 2a_3a_2 + a_4a_1, \quad (47)$$

$$5a_1a_5 + 4a_2a_4 + 3a_3a_3 + 2a_4a_2 + a_5a_1, \quad (48)$$

$$5a_2a_5 + 4a_3a_4 + 3a_4a_3 + 2a_5a_2, \quad (49)$$

$$5a_3a_5 + 4a_4a_4 + 3a_5a_3, \quad (50)$$

$$5a_4a_5 + 4a_5a_4, 5a_5a_5) \quad (51)$$

e vamos agora impor a condição de que este polinômio produto seja identicamente nulo, observando que $f'(a) = a_1 = 1$

$$a_0 = 0, a_1 = 1 \quad (52)$$

$$2a_0a_2 + a_1a_1 = 0 \Rightarrow 0 + 1 = 0 \text{ é impossível} \quad (53)$$

$$(54)$$

É fácil ver que esta equação não pode ter outro resultado, f, f' são linearmente independentes, se $f'(x) = 0$ sempre então f é constante, e este valor constante é a_0 , mas não é o caso. Se f for identicamente zero, então f' também o é contradizendo $a_1 = 1$. Esta equação é impossível, e o desenvolvimento com polinômio de Taylor serviu para verificar isto.

11. Derivadas parciais introdução teórica A equação de plano que passa no ponto (a, b, c) é por comparação com a equação da reta

$$z - c + A(x - a) + B(y - b) = 0 \quad (55)$$

$$z = c - A(x - a) - B(y - b) \quad (56)$$

- (a) Calcule as derivadas parciais de $z = f(x, y)$ na equação (56).
 (b) Justifique a afirmação seguinte usando os conceitos “tangente”, “coeficiente angular” dentro de uma pequena redação.

Se o plano cuja equação está em (55), for tangente ao gráfico de uma função no ponto $(a, b, f(a, b))$ então a equação do plano seria, atualizando os valores de c, A, B na equações (55), (56):

$$z - f(a, b) + A(x - a) + B(y - b) = 0 \quad (57)$$

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - b) \quad (58)$$

- (c) Escreva as equações dos planos tangentes das funções nos pontos indicados:

$z = f(x, y) =$	(a, b)	$z = f(x, y)$	(a, b)
a) $z = \text{sen}(x)$	(0, 0)	b) $\frac{x+y}{1+x^2+y^2}$	(-1, -1)
c) $z = y * \cos(x)$	(1, 1)	d) $\frac{x \text{sen}(x)}{1+x^2+y^2}$	(0, 1)
e) $z \text{sen}(x+3)(x+2)y$	(-1, 1)	f) $\frac{x \text{sen}(x)}{1+x^2+y^2}$	(1, 1)

- (d) Para cada um dos itens na questão anterior, calcule um vetor perpendicular ao gráfico da função no ponto indicado.

12. Considere uma função

$$z = f(x, y) \quad (59)$$

que seja derivável numa vizinhança do ponto $(a, b, f(a, b))$. Então ela tem um plano tangente no ponto $(a, b, f(a, b))$, semelhante ao caso da função univariada com a reta tangente. Identifique entre as equações abaixo se alguma é equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a, b, f(a, b))$ e justifique sua escolha.

- (a) $z + f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial y}(x - a) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - a)$
 (b) $z - f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial y}(x - a) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - a) = 0$
 (c) $z - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - b) = 0$
 (d) $z - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(x - a) - \frac{\partial f}{\partial y}(y - b) = 0$

13. Sabendo que as taxas de variação parciais de $z = f(x, y)$ no ponto $(1, 2)$ são

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2; \frac{\partial f}{\partial y} = 3$$

e que $f(1, 2) = -5$

- (a) Escreva a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 2, f(1, 2))$
 (b) calcule aproximadamente

$$f(1.1, 2.1)$$