tarcisio@member.ams.org
T. Praciano-Pereira **Dep. de Matemática**
Univ. Estadual Vale do Acaraú
4 de fevereiro de 2008
Documento escrito com LaTeX - sis. op. Debian/Gnu/Linux

0.1 Tutorial sobre Polinômio de Taylor

objetivo: Usar Polinômios de Taylor associados com equações diferenciais ordinárias. O objetivo nesta disciplina é solução de equações diferenciais *aproximadamente* associando-as *sempre* com suas aplicações. Os polinômios de Taylor são uma representação aproximada de funções e aqui uma *representação aproximada* de soluções de equações diferenciais. *Inicialmente* vamos aprender a ferramenta, *depois* vamos usá-la.

palavras chave: Polinômio de Taylor, equações diferenciais ordinárias, série de potências.

A série de Taylor é um caso particular de *série de potência*.

Definição 1 *Série de potência*

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{1}$$

expandida na origem, ou, de forma mais geral,

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k \tag{2}$$

a série expandida no ponto $\underline{x = a}$.

Nas séries de Taylor,

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

Em geral usamos os polinômios de Taylor: um elemento da série, ou o termo de ordem $\underline{n}$ da série de Taylor:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \tag{3}$$

expandido na origem, ou, de forma mais geral,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k \tag{4}$$

o polinômio de Taylor expandido no ponto $\underline{x = a}$.

Observe que

$$S(x) = \lim_{n} P_n(x) \tag{5}$$

A equação da reta tangente é um primeiro exemplo de polinômio de Taylor, do primeiro grau. Depois vem a parábola tangente, um polinômio do terceiro grau tangente, . . .

0.2 Exercícios

1. **teoria** Reta tangente ao gráfico de uma função Fórmula de Taylor. A derivada de uma função nos fornece o coeficiente angular instantâneo da mesma no ponto:

   $$f'(a) \text{ é o coeficiente angular instantâneo de } f \text{ em } (a, f(a))$$

2. **teórica** Fórmula de Taylor - equação da reta Escreva a equação da reta que passa no $(a, f(a))$ e é tangente ao gráfico da função neste ponto. Observe que você deseja a equação da reta que passa no ponto $(a, f(a))$, com coeficiente angular $f'(a)$. Faça um gráfico genérico mostrando o que acontece.

3. Escreva a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto a em cada caso abaixo e faça o gráfico com `gnuplot`

$f(x) =$	a	$f(x) =$	a
a)$sen(x)$	$a = 0$	b) $\frac{1}{1+x^2}$	$a = 0$
c) $cos(x)$	$a = 0$	d)$\frac{sen(x)}{1+x^2}$	$a = 0$
e)$sen(x+3)(x+2)$	$a = 1$	f)$\frac{xsen(x)}{1+x^2}$	$a = -1$

4. Teórica - polinômio do segundo grau tangente Expanda as equações (5), (4) para encontrar as equações de uma parábola (polinômio do segundo grau) tangente ao gráfico de f *memorizando* também a curvatura (segunda derivada)

   $$y = A + B(x-a) + C(x-a)^2 \tag{6}$$

   Um polinômio desenvolvido[1] no ponto x = a.

5. Escreva a equação da parábola tangente ao gráfico de f em cada caso indicado abaixo, e faça o gráfico com `gnuplot`.

$f(x) =$	a	$f(x) =$	a
a)$sen(x)$	$a = 0$	b) $\frac{1}{1+x^2}$	$a = 0$
c) $cos(x)$	$a = 0$	d)$\frac{sen(x)}{1+x^2}$	$a = 0$
e)$sen(x+3)(x+2)$	$a = 1$	f)$\frac{xsen(x)}{1+x^2}$	$a = -1$

[1] novamente, um polinômio desenvolvidono ponto x = a

6. Teórica - polinômio do terceiro grau tangente Expanda as equações (5), (4) para obter as condições que façam de

$$P(x) = A + B(x-a) + C(x-a)^2 + D(x-a)^3 \tag{7}$$

um polinômio do terceiro grau, tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$. Descreva as equações para determinarmos os coeficientes A, B, C, D.

7. Escreva a equação do polinômio do terceiro grau tangente[2] ao gráfico de f em cada caso indicado abaixo e faça o gráfico com `gnuplot`.

$f(x) =$	a	$f(x) =$	a
a)$sen(x)$	$a = 0$	b) $\frac{1}{1+x^2}$	$a = 0$
c) $cos(x)$	$a = 0$	d) $\frac{sen(x)}{1+x^2}$	$a = 0$
e)$sen(x+3)(x+2)$	$a = 1$	f) $\frac{xsen(x)}{1+x^2}$	$a = -1$

8. Série de Potências Um polinômio de Taylor (um polinômio) é uma série de potências truncada (finita). Uma série de potências é uma expressão da forma

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \ ; \ g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \tag{8}$$

   (a) Considere polinômios, em vez de séries, e descubra uma regra prática[3] para multiplicação: $f(x)g(x)$ por exemplo:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{5} a_k x^k \ ; \ g(x) = \sum_{k=0}^{4} b_k x^k \tag{9}$$

Um exemplo:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
1&1&1&1&1&1&1&1&1&&&&&&&&&\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&&&&&&&&&\\ \hline
1&1&1&1&1&1&1&1&1&&&&&&&&&\\
&1&1&1&1&1&1&1&1&1&&&&&&&&\\
&&1&1&1&1&1&1&1&1&1&&&&&&&\\
&&&1&1&1&1&1&1&1&1&1&&&&&&\\
&&&&1&1&1&1&1&1&1&1&1&&&&&\\
&&&&&1&1&1&1&1&1&1&1&1&&&&\\
&&&&&&1&1&1&1&1&1&1&1&1&&&\\
&&&&&&&1&1&1&1&1&1&1&1&1&&\\
&&&&&&&&1&1&1&1&1&1&1&1&1&\\
&&&&&&&&&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ \hline
1&2&3&4&5&6&7&8&9&9&8&7&6&5&4&3&2&1
\end{array}$$

[2]Polinômio de Taylor de f desenvolvido no ponto $x = a$

[3]Euler recebeu duras críticas porque ele fazia estas contas sem discutir a convergência... mas agora estamos propondo que use polinômios, para evitar as críticas

Um outro exemplo

$$(2 + 3x + 7x^2 + 5x^4)(2x + 5x^3 + 7x^4 + 3x^6)$$

0	2	0	5	7	0	3				
2	3	7	0	5						
0	4	0	10	14	0	6				
	0	6	0	15	21	0	9			
		0	14	0	35	49	0	21		
			0	0	0	0	0	0	0	
				0	10	0	25	35	0	15
0	4	6	14	15	66	49	34	56	0	15

(b) Experimente multiplicar os polinômios acima usando apenas os coeficientes e descubra uma regra prática para esta multiplicação envolvendo apenas os coeficientes.

(c) Tente generalizar usando

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k \; ; \; g(x) = \sum_{k=0}^{M} b_k x^k \tag{10}$$

(d) Procure descobrir a regra de multiplicação no caso geral

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \; ; \; g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \tag{11}$$

Solução 1 *É o que se encontra feito nos dois exemplos na solução acima. Vamos repetir o esquema usando coeficientes algébricos para que possamos entender melhor o que se passa.*

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6				
b_0	b_1	b_2	b_3	b_4						
a_0b_0	a_1b_0	a_2b_0	a_3b_0	a_4b_0	a_5b_0	a_6b_0				
	a_0b_1	a_1b_1	a_2b_1	a_3b_1	a_4b_1	a_5b_1	a_6b_1			
		a_0b_2	a_1b_2	a_2b_2	a_3b_2	a_4b_2	a_5b_2	a_6b_2		
			a_0b_3	a_1b_3	a_2b_3	a_3b_3	a_4b_3	a_5b_3	a_6b_3	
				a_0b_4	a_1b_4	a_2b_4	a_3b_4	a_4b_4	a_5b_4	a_6b_4

(12)

O que caracteriza os elementos de uma coluna é que a soma dos índices é constante:

$$\sum_{i+j=k} a_i b_j$$

Na primeira coluna a soma $i+j = 0$, na segunda coluna a soma é $i+j = 1$ e assim sucessivamente até o máximo valor da soma de índices, $i+j = n+m$, que dá o grau do produto de polinômios.

Se usarmos apenas os coeficientes para representar um polinõmio, podemos dizer

$$(a_i)_{i=0}^{n}(b_j)_{j=0}^{m} = (\sum_{i+j} a_i b_j)_{i+j=0}^{i+j=n+m} \tag{13}$$

$$(a_i)_{i=0}^{n}(b_j)_{j=0}^{m} = (\sum_{i+j=k} a_i b_j)_{k=0}^{k=n+m} \tag{14}$$

$$\sum_{i+j=0}(a_i b_j), \sum_{i+j=1}(a_i b_j), \dots, \sum_{i+j=n+m}(a_i b_j)) \tag{15}$$

Podemos agora escrever o produto $f(x)g(x)$. Nesta expressão está presente a variável, ela aparecerá com expoentes distintos que servem para marcar a posição. *O expoente é a variável*

$$k = i + j$$

que aparece nas expressões acima:

$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{n+m} \sum_{i+j=k} a_i b_j x^k$$

que corresponde na equação (15) colocar uma soma entre os termos incluindo em cada termo a variável com potência k.

9. Equação diferencial e polinômio de Taylor

   (a) Considere um polinômio de Taylor de grau n

   $$P(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \dots a_n(x-a)^n$$

   tangente ao gráfico de f, solução da equação diferencial

   $$f'' + f' + f = 0 \ ; \ f(a) = 1 \ ; \ f'(a) = -\frac{1}{2} \tag{16}$$

   encontre as condições sobre os coeficientes a_k que esta equação diferencial induz.

   sugestão: Escreva a matriz de P e sua derivadas, some apenas os coeficientes e aplique a condição representada pela equação diferencial.

   Solução 2 *Esta equação tem um solução exata que nós já sabemos calcular, basta fazer a suposição que $y = e^{at}$ é uma solução e substituir na equação para encontrar os valores de a que tornam a exponencial uma solução:*

   $$y + y' + y'' = e^{at} + ae^{at} + a^2 e^{at} = e^{at}(1 + a + a^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + a + a^2 = 0$$

   Resolvendo a equação temos $a = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e portanto as soluções exatas da equação diferencial são

   $$y_1(x) = e^{-\frac{x}{2}} e^{i\frac{\sqrt{3}x}{2}} \tag{17}$$

   $$y_1(x) = e^{-\frac{x}{2}}(cos(\frac{\sqrt{3}x}{2}) + isen(\frac{\sqrt{3}x}{2})) \tag{18}$$

   $$y_2(x) = e^{-\frac{x}{2}} e^{-i\frac{\sqrt{3}x}{2}} \tag{19}$$

   $$y_2(x) = e^{-\frac{x}{2}}(cos(\frac{\sqrt{3}x}{2}) - isen(i\frac{\sqrt{3}x}{2})) \tag{20}$$

Aqui vamos lembrar uma observação que fizemos quando rapidamente estudamos as equações deste tipo, que chamamos de lineares, *porque elas tem propriedades que vem da* Álgebra Linear *como ainda veremos mais a frente. Vimos que se encontrassemos duas soluções de uma* equação diferencial linear, *então, qualquer combinação linear delas também era uma solução, em particular a soma delas é uma solução. Se somarmos $y_1 + y_2$ o resultado é*

$$y = 2e^{-\frac{x}{2}} cos(\frac{\sqrt{3}x}{2}) \tag{21}$$

porque elas são conjugadas. Poderiamos ter usado $\frac{1}{2}$ em vez de 1 como coeficientes da combinação linear para concluir que

$$y = e^{-\frac{x}{2}} cos(\frac{\sqrt{3}x}{2}) \tag{22}$$

$$y' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} cos(\frac{\sqrt{3}x}{2}) - \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{x}{2}} sen(\frac{\sqrt{3}x}{2}) \tag{23}$$

$$considerando\ a = 0, y(a) = 1, y'(a) = -\frac{1}{2} \tag{24}$$

e encontramos assim uma solução exata, real, para equação diferencial.

Observe que isto sempre é possível, porque um polinômio a coeficientes reais com raizes complexas tem raízes complexas conjugadas o que resulta, como acima, em soluções reais para a equação diferencial como precisamos.

Vamos agora procurar uma solução aproximada usando Polinômio de Taylor.

A idéia consiste supor que um polinômio de um certo grau seja a solução aproximada da equação e impor a este polinômio as condições da equação para encontrar uma sistema de equações sobre os coeficientes do polinômio.

A aproximação (precisão) vai se dar em função da escolha que fizermos do grau do polinômio, se usarmos uma série de Taylor *teriamos uma solução exata, mas nem sempre se consegue expressar uma série de Taylor de forma conveniente, mas se conseguirmos o vamos fazer a partir da expressão de polinômios de Taylor e uma condição de indução que consigamos descobrir.*

Vamos começar com a aproximação *usando polinômio de Taylor de grau 7*

$$P(x) = a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+a_3(x-a)^3+a_4(x-a)^4+a_4(x-a)^4+\cdots+a_4(x-a)^7 \tag{25}$$

escolhendo o ponto $\underline{a = 0}$ onde vamos desenvolver o polinômio, seria exatamente o ponto com o qual se expressam as condições iniciais que no presente caso está em forma algébrica. Vamos o ponto em que encontramos uma solução exata para que possamos obter um gráfico comparativo com `gnuplot`.

Vamos agora expressar a matriz das derivadas de P

$$P(0) = 1 \tag{26}$$

$$P'(0) = -\frac{1}{2} \tag{27}$$

$$P(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \tag{28}$$

$$+a_4(x-a)^4 + a_4(x-a)^4 + \cdots \tag{29}$$

$$P'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + 4a_4(x-a)^3 + \tag{30}$$

$$+5a_5(x-a)^4 + 6a_6(x-a)^5 + \cdots \tag{31}$$

$$P''(x) = 2a_2 + 6a_3(x-a) + 12a_4(x-a)^2 + 20a_5(x-a)^3 + \tag{32}$$

$$+30a_6(x-a)^4 + 42a_7(x-a)^5 \tag{33}$$

$$P(x) + P'(x) + P''(x) = 0 \tag{34}$$

$$a_0 + a_1 + 2a_2 + (a_1 + 2a_2 + 6a_3)(x-a) + (a_2 + 3a_3 + 12a_4)(x-a)^2 + \tag{35}$$

$$+(a_3 + 4a_4 + 20a_5)(x-a)^3 + (a_4 + 5a_5 + 30a_6)(x-a)^4 + \tag{36}$$

$$+(a_5 + 6a_6 + 42a_7)(x-a)^5 \equiv\ 0 \tag{37}$$

e vamos agora impor as condições iniciais, equação (25), nas expressões das equações (34) e (37). Porque elas representam a soma $P + P' + P''$ que é a solução aproximada que estamos procurando:

Isto nos dá o sistema de equações

$$\begin{cases} a_0 & = 1 \\ a_1 & = -\frac{1}{2} \\ a_0 + a_1 + 2a_2 & = 0 \\ a_1 + 2a_2 + 6a_3 & = 0 \\ a_2 + 3a_3 + 12a_4 & = 0 \\ a_3 + 4a_4 + 20a_5 & = 0 \\ a_4 + 5a_5 + 30a_6 & = 0 \\ a_5 + 6a_6 + 42a_7 & = 0 \end{cases} \tag{38}$$

Resolvendo o sistema de equações, temos:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = -\frac{1}{2} a_2 = -\frac{1}{4} \\ a_3 = -\frac{1}{6} \\ a_4 = \frac{1}{18} \\ a_5 = -\frac{1}{20*18} \\ a_6 = \frac{15}{20*18*30} \\ a_7 = \frac{1}{42*2*2*30} \end{cases} \tag{39}$$

$$P(x) = 1 - (1/2.0) * x - (1/4.0)x^2 - (1/6.0) * x^3 + (1/18.0) * x^4 + \tag{40}$$

$$+(1/(20 * 18.0)) * x^5 + (15/(20 * 18 * 30.0)) * x^6 + (1/(42 * 120.0)) * x^7 \tag{41}$$

Os comandos para o gnuplot são

```
P(x) = 1 - (1/2.0)*x - (1/4.0)*x**2 - (1/6.0)*x**3 + (1/18.0)*x**4\
  + (1/(20*18.0))*x**5 + (15/(20*18*30.0))*x**6 + (1/(42*120.0))*x**7
f(x) = exp(-0.5*x)*cos( 0.5*sqrt(3)*x)
set terminal postscript enhanced color portrait
set output ‘‘exer02_01_01.eps’’
```

Veja na figura (1) página 7,

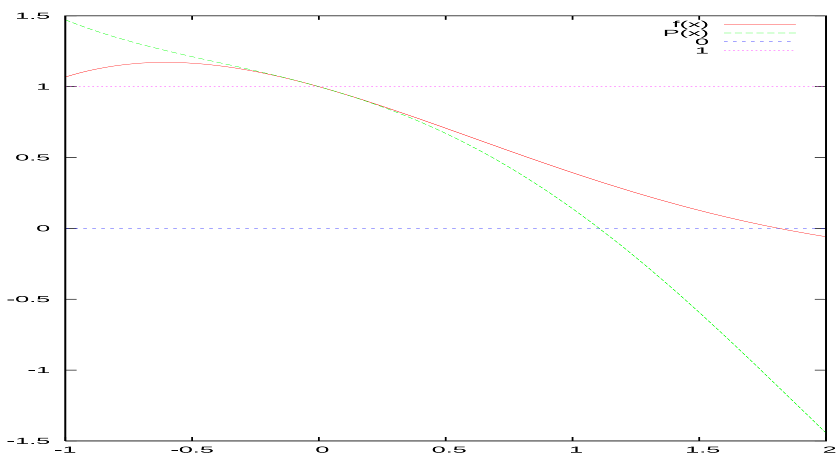

Figura 1: Solução aproximada com Polinômio de Taylor

(b) Na equação diferencial anterior, verifique que se tivermos as condições iniciais

$$f(a) = 1 \ ; \ f'(a) = -\frac{1}{2} \tag{42}$$

podemos encontrar uma solução única (aproximada) para equação diferencial (16). Faça o gráfico desta solução aproximada usando `gnuplot`.

10. Equação diferencial e polinômio de Taylor

Considere um polinômio de Taylor do terceiro grau

$$P(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 \dots$$

tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ f que seja uma solução da equação diferencial (o polinômio é uma aproximação da solução)

$$ff' = 0 \ ; \ f'(a) = 1 \tag{43}$$

encontre as condições sobre os coeficientes a_k que a equação diferencial (43) induz, calcule os coeficientes e faça o gráfico de P usando `gnuplot`.

Sugestão: multiplique os polinômios usando apenas a matriz dos coeficientes e aplique a condição representada pela equação diferencial.

Solução 3 *Já fizemos na solução (1) o produto de polinômios e usando o método alí desenvolvido, teremos todas as somas em que a soma dos índices for constante, podemos escrever (vou escrever "ff'" para sugerir o uso apenas dos coeficientes do polinômio).*

$$ff' \approx (a_0, a_1, \dots, a_5)(a_1, 2a_2, \dots, 5a_5) = \tag{44}$$
$$= (a_0a_1, 2a_0a_2 + a_1a_1, 3a_0a_3 + 2a_1a_2 + a_2a_1, \tag{45}$$
$$4a_0a_4 + 3a_1a_3 + 2a_2a_2 + a_3a_1, \tag{46}$$
$$5a_0a_5 + 4a_1a_4 + 3a_2a_3 + 2a_3a_2 + a_4a_1, \tag{47}$$
$$5a_1a_5 + 4a_2a_4 + 3a_3a_3 + 2a_4a_2 + a_5a_1, \tag{48}$$
$$5a_2a_5 + 4a_3a_4 + 3a_4a_3 + 2a_5a_2, \tag{49}$$
$$5a_3a_5 + 4a_4a_4 + 3a_5a_3, \tag{50}$$
$$5a_4a_5 + 4a_5a_4, 5a_5a_5) \tag{51}$$

e vamos agora impor a condição de que este polinômio produto seja identicamente nulo, observando que $f'(a) = a1 = 1$

$$a_0 = 0, a_1 = 1 \tag{52}$$
$$2a_0a_2 + a_1a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 + 1 = 0 \text{ é impossível} \tag{53}$$
$$\tag{54}$$

É fácil ver que esta equação não pode ter outro resultado, f, f' são linearmente independentes, se $f'(x) = 0$ sempre então f é constante, e este valor constante é a_0, mas não é o caso. Se f for identicamente zero, então f' também o é contradizendo $a_1 = 1$. Esta equação é impossível, e o desenvolvimento com polinômio de Taylor serviu para verificar isto.

11. Derivadas parciais introdução teórica A equação de plano que passa no ponto (a,b,c) é por comparação com a equação da reta

$$z - c + A(x-a) + B(y-b) = 0 \tag{55}$$
$$z = c - A(x-a) - B(y-b) \tag{56}$$

(a) Calcule as derivadas parciais de $z = f(x,y)$ na equação (56).

(b) Justifique a afirmação seguinte usando os conceitos "tangente", "coeficiente angular" dentro de uma pequena redação.
Se o plano cuja equação está em (55), for tangente ao gráfico de uma função no ponto $(a,b,f(a,b))$ então a equação do plano seria, atualizando os valores de c, A, B na equações (55), (56):

$$z - f(a,b) + A(x-a) + B(y-b) = 0 \tag{57}$$
$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-b) \tag{58}$$

(c) Escreva as equações dos planos tangentes das funções nos pontos indicados:

$z = f(x,y) =$	(a,b)
a)$z = sen(x)$	$(0,0)$
c))$z = y * cos(x)$	$(1,1)$
e))$zsen(x+3)(x+2)y$	$(-1,1)$

$z = f(x,y)$	(a,b)
b))$\frac{x+y}{1+x^2+y^2}$	$(-1,-1)$
d))$\frac{ysen(x)}{1+x^2+y^2}$	$(0,1)$
f))$\frac{xsen(x)}{1+x^2+y^2}$	$(1,1)$

(d) Para cada um dos itens na questão anterior, calcule um vetor perpendicular ao gráfico da função no ponto indicado.

12. Considere uma função
$$z = f(x,y) \tag{59}$$
que seja derivável numa vizinhança do ponto $(a,b,f(a,b))$. Então ela tem um plano tangente no ponto $(a,b,f(a,b))$, semelhante ao caso da função univariada com a reta tangente. Identifique entre as equações abaixo se alguma é equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a,b,f(a,b))$ e justifique sua escolha.

(a) $z + f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial y}(x-a) + \frac{\partial f}{\partial x}(x-a)$

(b) $z - f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial y}(x-a) + \frac{\partial f}{\partial x}(x-a) = 0$

(c) $z - f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-b) = 0$

(d) $z - f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(x-a) - \frac{\partial f}{\partial y}(y-b) = 0$

13. Sabendo que as taxas de variação parciais de $z = f(x,y)$ no ponto $(1,2)$ são
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2; \frac{\partial f}{\partial y} = 3$$
e que $f(1,2) = -5$

(a) Escreva a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 2, f(1, 2))$

(b) calcule aproximadamente

$$f(1.1, 2.1)$$